UNIDAD 3 DETERMINANTES

Página 76

Determinantes de orden 2

■ **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$

Solución: $x = 4, \ y = 7$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0.$ *Solución:* $x = \dfrac{8}{5} + \dfrac{3}{5}\lambda, \ y = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Solución: $x = 5, \ y = -3$

d) $\left.\begin{array}{l} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$ *Incompatible*

e) $\left.\begin{array}{l} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$

Solución: $x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}\lambda, \ y = \lambda$

f) $\left.\begin{array}{l} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0.$ *Solución:* $x = \dfrac{1402}{109}, \ y = \dfrac{886}{109}$

Página 77

Determinantes de orden 3

- **Queremos calcular todos los posibles productos (de tres factores) en los que intervengan un elemento de cada fila y uno de cada columna de esta matriz:**

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Averigua cuántos productos hay y calcula todos ellos.

b) Hazlo de nuevo para una matriz 3×3 cualquiera.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a) Hay 6 productos:

$6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$ $\quad$ $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$

$2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$ $\quad$ $7 \cdot 8 \cdot 6 = 336$

$9 \cdot 8 \cdot 4 = 288$ $\quad$ $2 \cdot 9 \cdot 1 = 18$

b)

$a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ $\quad$ $a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$

$a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$ $\quad$ $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$

$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ $\quad$ $a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Determinantes de orden 4

- **En una matriz 4×4, ¿cuántos productos de 4 factores hay en los que intervengan un elemento de cada fila y uno de cada columna?**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Hay $4! = 24$ productos.

- **¿Sabrías decir, en general, en una matriz cuadrada $n \times n$, cuántos productos de n factores, uno de cada fila y uno de cada columna, pueden darse?**

Hay $n!$ productos.

Página 80

1. Calcula el valor de los siguientes determinantes y di por qué son cero algunos de ellos:

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\quad$ b) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -50$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene una columna de ceros.

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene sus dos filas iguales.

e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0$, porque sus filas son proporcionales: (1ª) · 7 = (2ª)

f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0$, porque sus dos columnas son proporcionales: (2ª) · (–20) = (1ª)

2. Calcula el valor de los siguientes determinantes teniendo en cuenta estos datos:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix} \qquad |A| = -13}$$

a) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{l} & \boldsymbol{m} \end{vmatrix}$ **b)** $|\boldsymbol{6A}|$ **c)** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{l} & \boldsymbol{4m} \\ \boldsymbol{n} & \boldsymbol{4p} \end{vmatrix}$ **d)** $|\boldsymbol{A^{-1}}|$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13$

b) $|6A| = \begin{vmatrix} 6l & 6m \\ 6n & 6p \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 36 \cdot (-13) = -468$

c) $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 4 \cdot (-13) = -52$

d) $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \to \quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-13} = -\dfrac{1}{13}$

Página 81

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

2. Halla el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{47} & \mathbf{59} \\ \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{91} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{10} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000$

Página 83

3. Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3ª fila es proporcional a la 1ª (3ª = (–2) · 1ª) (propiedad 6).

c) La 3ª fila es combinación lineal de las dos primeras (3ª = 1ª + 10 · 2ª) (propiedad 9).

d) La 1ª fila es combinación lineal de las otras dos (1ª = 10 · 2ª + 3ª) (propiedad 9).

4. Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ **a)** $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Página 84

1. Justifica que los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 27 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 36 \\ 0 & 6 & 2 & 54 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 612 & 704 & 410 & 103 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

valen: a) 0, b) 0, c) 96 ó –96, d) 1 ó –1

a) La 4ª columna es proporcional a la 2ª (4ª = 9 · 2ª), luego el determinante vale 0 (propiedad 6).

b) La 3ª fila es combinación lineal de las otras tres (3ª = 100 · 4ª + 10 · 1ª + 2ª), luego el determinante es 0 (propiedad 9).

c) $4 \cdot 8 \cdot 1 \cdot (-3) = -96$; este es el único producto posible distinto de cero. Luego, el determinante valdrá 96 ó –96, según el signo que le corresponda a dicho producto.

d) $1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$ es el único producto posible distinto de cero. Luego, el determinante valdrá 1 ó –1, según el signo que le corresponda a dicho producto.

Página 85

1. Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menores de orden dos; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menores de orden tres; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

2. Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{12}, a_{33} y a_{43} de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

Página 87

1. **Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{9} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desarrollando por la 1ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) =$$

$$= -120 + 518 + 58 = 456$$

Desarrollando por la 2ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) =$$

$$= 180 + 42 + 234 = 456$$

Desarrollando por la 3ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 =$$

$$= 396 - 104 + 164 = 456$$

Desarrollando por la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 =$$

$$= -120 + 180 + 396 = 456$$

Desarrollando por la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 =$$

$$= 518 + 42 - 104 = 456$$

Desarrollando por la 3ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 =$$

$$= 58 + 234 + 164 = 456$$

2. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$:

a) Halla la suma de los productos de cada elemento de la 1ª fila por el correspondiente adjunto de la 3ª fila.

b) Halla la suma de los productos de cada elemento de la 3ª columna por el adjunto de los correspondientes elementos de la 2ª columna.

c) Justifica por qué los dos resultados anteriores son cero.

a) $a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot A_{33} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot 44 - 7 \cdot 13 - 1 \cdot 41 = 132 - 91 - 41 = 0$

b) $a_{13} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{22} + a_{33} \cdot A_{32} = -1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (-74) + 6 \cdot 21 - 4 \cdot 13 = -74 + 126 - 52 = 0$

c) Por la propiedad 12.

3. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$

(1) Desarrollando por la 2ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desarrollando por la 4ª fila.

También podríamos haber observado que la 4ª columna es igual a la suma de las otras tres; y, por tanto, el determinante vale cero.

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-12) - 4 \cdot (-2) = -36 + 8 = -28$

(1) Desarrollando por la 1ª fila.

d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 83$

(1) Desarrollando por la 4ª columna.

Página 88

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{COLUMNAS} \\ 1^a - 3 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a - 4 \cdot 2^a \\ 4^a \end{array} \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ 17 & -5 & 23 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 17 & 23 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 145 = 290$

(1) Desarrollando por la 4ª fila.

b) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{COLUMNAS} \\ 1^a - 5 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a - 6 \cdot 2^a \end{array} \begin{vmatrix} 28 & -5 & 2 & 32 \\ -31 & 7 & 8 & -15 \\ -24 & 5 & 3 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 28 & 2 & 32 \\ -31 & 8 & -15 \\ -24 & 3 & -18 \end{vmatrix} = 0$

(1) Desarrollando por la 4ª fila.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \\ 4^a \\ 5^a + 2^a \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{array}{l}\text{FILAS}\\ \boxed{\begin{array}{l}1^a - 3 \cdot 2^a\\ 2^a\\ 3^a\\ 4^a + 2^a\end{array}}\end{array} = - \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -16$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l}\text{FILAS}\\ \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ 3^a\\ 4 \cdot 3^a + 4^a\end{array}}\end{array} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & 2 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l}\text{COLUMNAS}\\ \boxed{\begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ (-2) \cdot 2^a + 3^a\end{array}}\end{array} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} = 27 - 16 = 9$$

Página 90

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{12} & \mathbf{8} \\ \mathbf{12} & \mathbf{10} & \mathbf{6} & \mathbf{23} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Observamos que la 3ª fila es la suma de las dos primeras, y que la 4ª fila es la suma de la 2ª y la 3ª. Por tanto, *ran* $(A) = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \to \quad \text{Las 3 primeras filas son linealmente independientes.}$$

Veamos si la 4ª fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0 \;\text{ y }\; \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\ (B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, las tres primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, entonces $ran\ (C) = 4$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, la primera, segunda y cuarta fila son linealmente independientes.

La tercera fila es la suma de las dos primeras. Luego, $ran\ (D) = 3$.

Página 95

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 S **De las siguientes operaciones con determinantes de orden 2 × 2, señala las que son correctas y, en su caso, enuncia las propiedades que se utilizan:**

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

a) Verdadero. Tiene las dos columnas iguales.

b) Verdadero. Si una fila está multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) Falso; sería $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

d) Verdadero. Si la 2ª fila está multiplicada por 2, el determinante queda multiplicado por 2.

2 S **Si** $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$**, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes? Justifica las respuestas:**

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} \dfrac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0$, pues las dos columnas son proporcionales.

(1) Si a una fila le sumamos otra multiplicada por un número, el determinante no varía.

(2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

(3) Si cambiamos de orden dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

(4) Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

3 **Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & 7 \\ \dots & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

4 **S** **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ **b)** $\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1 + x^2 + 2x - (1 + x^2 - 2x) =$$

$$= 1 + x^2 + 2x - 1 - x^2 + 2x = 4x = 12 \;\rightarrow\; x = 3$$

b) $\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = sen\ x - cos\ x = 0 \;\rightarrow\; sen\ x = cos\ x \;\rightarrow\; \frac{sen\ x}{cos\ x} = 1 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; tg\ x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-2) - x(1-2x) = x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 = x^3 - x =$$

$$= x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

5 **Calcula el valor de estos determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$ e) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

6
S **Halla el rango de las siguientes matrices:**

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran\,(C) \geq 2$

Las dos últimas filas son linealmente independientes.

Veamos si la 2ª fila depende linealmente de las dos últimas:

$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$. La 2ª fila depende linealmente de las dos últimas.

Veamos si la 1ª fila depende de las dos últimas:

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Por tanto, $ran\,(C) = 3$.

b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Las dos primeras columnas son linealmente independientes. Luego $ran\,(D) \geq 2$

Veamos si la 3ª columna depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \text{ Por tanto, } ran\ (D) = 3.$$

7 S **Halla los valores de *a* que anulan cada uno de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$

☛ ***Desarrolla, iguala a 0 y resuelve la ecuación que obtengas.***

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3 + a + 6 - 6] =$

$$= (a-1)(3+a) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a^2 = 3 \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 =$

$= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases} \end{cases}$$

8 S **Calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -72$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 938$

Página 96

PARA RESOLVER

9 **S** **Justifica, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos:**

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

a) La 1ª y la 3ª columnas son proporcionales (la 3ª es –5 por la 1ª).

b) Sumamos la 3ª fila a la 2ª:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues tiene dos filas iguales).}$$

10 **S** **Prueba, sin desarrollar, que $|A|$ es múltiplo de 3 y $|B|$ es múltiplo de 5:**

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Es múltiplo de 3.}$$

(1) Sumamos a la 3ª columna las otras dos.

(2) Si una columna se multiplica por un número, el determinante queda multipicado por ese número.

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Es múltiplo de 5.}$$

(3) Sumamos a la 3ª fila la 2ª.

11 **S** **¿Para qué valores de a se anula este determinante?** $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Calcula el rango de la matriz A en los siguientes casos:

$a = 1$ $a = 0$ $a = 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} + 1^{a} \\ 4^{a} + 1^{a} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -[8(a+1) - 30 + 6] = -[8a + 8 - 30 + 6] = -(8a - 16) = 0 \rightarrow a = 2$$

Por tanto:

- **Si $a = 1$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 4$
- **Si $a = 0$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 4$
- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ $|A| = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (A) = 3$$

12 **S** **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \;\rightarrow\; a = 2$

- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 2$
- **Si $a \neq 2$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; a = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \dfrac{7 \pm 9}{-2}$ $\begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (B) \geq 2$

Por tanto:

- **Si $a = 1$** $\rightarrow$ $|B| = 0$ $\rightarrow$ $ran\ (B) = 2$
- **Si $a = -8$** $\rightarrow$ $|B| = 0$ $\rightarrow$ $ran\ (B) = 2$
- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -8$** $\rightarrow$ $|B| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (B) = 3$

c) Por el ejercicio 11, sabemos que $|C| = 0 \;\rightarrow\; a = 2$, y que:

- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ $ran\ (C) = 3$
- **Si $a \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\ (C) = 4$

d) $D = \left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

• **Si $a = 1$,** queda:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ (D) = 1$$

• **Si $a = -1$,** queda:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\ (D) = 2$$

• **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$** $\rightarrow$ $ran\ (D) = 2$

13 **S** **¿Para qué valores de x se anulan los determinantes siguientes?**

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} x \cdot x^3 - 1 = x^4 - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

(1) Desarrollamos por la 1ª columna.

(2) Son determinantes de matrices triangulares.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = a(x-b)(x-c) = 0 \begin{cases} x = b \\ x = c \end{cases}$

(Suponemos que $a \neq 0$).

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 2-x & -x & 1 & 0 \\ 2-x & 1 & -x & 1 \\ 2-x & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (2-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$

$$\underset{\substack{\text{FILAS}\\ 1^a\\ 2^a - 1^a\\ 3^a - 1^a\\ 4^a - 1^a}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \underset{(4)}{=}$$

$$= -x \begin{vmatrix} -x-1 & -1 \\ -1 & -x-1 \end{vmatrix} = -x\,[(-x-1)^2 - 1] = -x[x^2 + 1 + 2x - 1] =$$

$$= -x(x^2 + 2x) = -x^2(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las demás.

(2) Sacamos $(2 - x)$ factor común de la 1ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1ª columna.

(4) Desarrollamos por la 2ª fila.

d) $$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x^3 + 1 + x - x) = (x-1)(x^3 + 1) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x^3 + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \end{cases}$$

(1) Sumamos a la 1ª columna la 2ª.

(2) Desarrollamos por la 1ª columna.

14 **S** **Determina el rango de las siguientes matrices según los valores de t:**

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ **f)** $F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = -t^3 + 1 + 1 + t - t - t = -t^3 - t + 2 = (t-1)(-t^2 - t - 2) = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ -t^2 - t - 2 = 0 \;\rightarrow\; t^2 + t + 2 = 0 \;\rightarrow\; t = -\dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{-2} \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

- **Si $t = 1$**, queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ como } |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$$

- **Si $t \neq 1$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 3$

b) $$|B| = \begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 + 4t - 2t - 4t = t^3 - 2t = t(t^2 - 2) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$$

- **Si $t = 0$**, queda:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow ran\ (B) = 2$$

- **Si $t = \sqrt{2}$**, queda:

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran\ (B) = 2$$

- **Si $t = -\sqrt{2}$**, queda:

$$B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran\ (B) = 2$$

- **Si $t \neq 0$, $t \neq \sqrt{2}$ y $t \neq -\sqrt{2}$** $\rightarrow$ $|B| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (B) = 3$

c) $$|C| = \begin{vmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)\,(t-1)^2 - 16 + 4(t+3) =$$

$$= (t+3)\,(t^2 - 2t + 1) - 16 + 4t + 12 = t^3 - 2t^2 + t + 3t^2 - 6t + 3 + 4t - 4 =$$

$$= t^3 + t^2 - t - 1 = (t-1)\,(t+1)^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

- **Si $t = 1$**, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow ran\ (C) = 2$$

- **Si $t = -1$**, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow ran\ (C) = 2$$

- **Si $t \neq 1$ y $t \neq -1$** $\rightarrow$ $|C| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (C) = 3$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$

Observamos que la 4ª columna se obtiene sumando la 2ª y la 3ª. Por tanto, para hallar el rango, podemos prescindir de una de esas tres columnas, por ejemplo de la 3ª.

Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -t & 6 & 9-t \end{vmatrix} = (9-t)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (9-t)(-1) = t - 9 = 0 \ \rightarrow \ t = 9$$

- **Si $t = 9$** $\rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (D) = 2$
- **Si $t \neq 9$** $\rightarrow$ $ran\ (D) = 3$

e) $|E| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix} = t(t+1)(t+3) + t(t-1)(-2t-1) - 2t(t+3) =$

$= t^3 + 4t^2 + 3t - 2t^3 + t^2 + t - 2t^2 - 6t = -t^3 + 3t^2 - 2t = t(-t^2 + 3t - 2) = 0$

$t = 0$

$-t^2 + 3t - 2 = 0 \ \rightarrow \ t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2}$ $\begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

- **Si $t = 0$**, queda:

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (E) = 2$

- **Si $t = 1$**, queda:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (E) = 2$

- **Si $t = 2$**, queda:

$E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (E) = 2$

- **Si $t \neq 0$, $t \neq 1$ y $t \neq 2$** $\rightarrow$ $|E| \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (E) = 3$

f) $F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tenemos que: $\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & t & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 + 4 + 2 - 4t - t - 4 =$

$= 2t^2 - 5t + 2 = 0 \ \rightarrow \ t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4}$ $\begin{cases} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

• **Si $t = 2$**, queda:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ iguales. Además, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\ (F) = 2$

• **Si $t = \frac{1}{2}$**, queda:

$$F = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Tenemos que $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0 \rightarrow ran\ (F) = 3$

• **Si $t \neq 2$ y $t \neq \frac{1}{2}$** $\rightarrow ran\ (F) = 3$

Página 97

15 S **Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado:**

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array}$$

$$(3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3 + 3x)\ (3 - x)^3 = 3(1 + x)\ (x - 3)^3$$

(1) Sumamos a la 1^a columna las demás.

(2) Sacamos $(3 + 3x)$ factor común, de la 1^a columna.

(3) Desarrollamos por la 1^a columna.

16 S **Halla, en función de a, el valor de los determinantes siguientes:**

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$$= (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4a+1)\cdot 1 = (4a+1)$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las demás.

(2) Sacamos $(4a+1)$ factor común, de la 1ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1ª columna.

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-0 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$= -a\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-a \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -a(2-a)^3 = a(a-2)^3$$

(1) Desarrollamos por la 4ª columna.

(2) Es el determinante de una matriz triangular.

17 **Prueba, sin desarrollarlos, que el valor de los siguientes determinantes es 0:**

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$

pues las dos últimas filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 0 + 0 = 0$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Hay dos filas iguales en cada uno de los determinantes.

18 S **Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$

$= \dfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \dfrac{1}{2} \cdot 5 = \dfrac{5}{2}$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\frac{1}{2}$ factor común de la 3ª fila. El 2º determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$

(1) Cuando cambiamos de orden dos filas consecutivas, el determinante cambia de signo.

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\text{1ª; 2ª – 3ª; 3ª}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$

$= 2 \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\text{1ª + 3ª; 2ª; 3ª}]{\text{FILAS}} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$

(1) Sacamos factor común el 2 de la 3ª fila.

19 S **Las matrices A y B tienen 3 filas y 12 columnas pero, en el proceso de edición, algunas de estas se han borrado.**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -7 & 5 & -2 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

¿Puedes averiguar algo sobre los posibles valores de su rango?

Si llamamos C a la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B, ¿cuál será el rango de C?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots \\ 3 & -1 & 0 & \dots \\ -7 & 5 & -2 & \dots \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$, sabemos que

$ran\ (A) \geq 2$. También sabemos, puesto que A solo tiene 3 filas, que $ran\ (A) \leq 3$. Por tanto, podemos afirmar que $2 \leq ran\ (A) \leq 3$; es decir, $ran\ (A)$ podría ser 2 ó 3.

- En el caso de la matriz B, tenemos que:

  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \dots \\ 3 & 0 & 1 & \dots \\ 5 & 4 & 0 & \dots \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$; y B solo tiene tres filas,

  entonces $ran\ (B) = 3$.

- Si C es la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B, por los resultados anteriores tendremos que $ran\ (C) = 3$.

20 S **Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$, donde a, b y c son no nulos.**

a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

b) Calcula el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = a\,b\,c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = abc \cdot 0 = 0$$

Pero $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -ab + 2ab = ab \neq 0$, pues a y b son no nulos.

Por tanto:

a) Hay dos columnas en la matriz A que son linealmente independientes.

b) $ran\ (A) = 2$

21 S **Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a, b y c:**

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a + b + c)\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 0$$

(1) Sumamos a la 2ª fila la 3ª.

(2) Sacamos $(a + b + c)$ factor común de la 2ª fila.

(3) Las dos primeras filas son proporcionales.

Luego, $ran\ (M) \le 2$. Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5b - 5a = 0 \;\rightarrow\; b = a \qquad \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ b & c \end{vmatrix} = 5c - 5b = 0 \;\rightarrow\; c = b$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix} = 5c - 5a = 0 \;\rightarrow\; a = c$$

Por tanto:

- **Si $a = b = c$** $\rightarrow$ $ran\ (M) = 1$
- **Si $a \ne b$ o $b \ne c$ o $a \ne c$** $\rightarrow$ $ran\ (M) = 2$

22 **Estudia el rango de la matriz:** $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

(1) Desarrollamos el determinante por la 3ª fila o por la 3ª columna.

Por tanto, como $|A| \ne 0$, tenemos que $ran\ (A) = 3$.

23 **Calcula el valor de este determinante:** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \\ 4^a \\ 5^a - 1^a \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -(-2) = 2$$

(1) Desarrollamos por la 1ª columna.

(2) Es el determinante de una matriz triangular.

Página 98

CUESTIONES TEÓRICAS

24 **¿Cuál es el valor del determinante de la matriz unidad de orden *n*?**

¿Y el de una matriz triangular de orden *n*?

Justifica tus respuestas.

$det\,(I_n) = 1$. El determinante de una *matriz triangular de orden n* es el producto de los elementos de su diagonal principal (pues el resto de los productos que intervienen en la obtención del determinante serían cero). En el caso de la matriz unidad de orden n, tenemos un ejemplo de matriz triangular en la que los elementos de su diagonal principal son unos. Por eso, el determinante vale 1.

25 **Comprueba que el determinante de una matriz de orden 3 es igual al de su traspuesta.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicando la definición de determinante, obtenemos que $|A^t| = |A|$. Lo vemos:

$$|A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

$$|A^t| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Luego $|A| = |A^t|$.

26 **¿Sabrías decir cuál de estos dos productos puede formar parte del desarrollo de un determinante de orden 4?**

a) $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$ **b)** $a_{14} \cdot a_{41} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

Solo podría ser b), puesto que en cada producto ha de aparecer un factor de cada fila y uno de cada columna.

27 **Comprueba que: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$ siendo A y B dos matrices diagonales de orden 3.**

Sea: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \to |A \cdot B| = a_{11}\, b_{11}\, a_{22}\, b_{22}\, a_{33}\, b_{33}$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \\ |B| = b_{11}\, b_{22}\, b_{33} \end{array}\right\} \; |A| \cdot |B| = a_{11}\, b_{11}\, a_{22}\, b_{22}\, a_{33}\, b_{33}$$

Luego, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

28 **S** **Justifica que** $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$

☛ ***Ten en cuenta que:*** $A \cdot A^{-1} = I$

Sabemos que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Como $A \cdot A^{-1} = I$, tenemos que:

$|A| \cdot |A^{-1}| = |I|$. Pero $|I| = 1$ (ver ejercicio 24). Por tanto, queda:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

(Observación: $|A| \neq 0$, puesto que existe A^{-1}, luego podemos dividir entre $|A|$).

29 **Si** A **es una matriz cuadrada de orden 4, ¿puedes saber el valor de:**

$$a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13} + a_{24} A_{14}$$

sin conocer los elementos de la matriz?

El resultado es 0, pues tenemos un producto de los elementos de una fila (la 2ª) por los adjuntos de otra (la 1ª).

30 **S** **Dadas la matrices** A **y** B **de orden** 4×4 **con** $|A| = 3$ **y** $|B| = 2$, **calcula:** $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ **y** $|(AB^{-1})^t|$.

Justifica las respuestas.

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{3}$ (ver ejercicio 28).

$$|B^t \cdot A| \underset{(1)}{=} |B^t| \cdot |A| \underset{(2)}{=} |B| \cdot |A| = 2 \cdot 3 = 6$$

$$|(AB^{-1})^t| \underset{(2)}{=} |AB^{-1}| \underset{(1)}{=} |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|A|}{|B|} = \frac{3}{2}$$

(1) Tenemos en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

(2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

31 **S** **De una matriz cuadrada** A **se sabe que su determinante vale –1, y que el determinante de** $2A$ **vale –8.**

¿Cuál es el orden de la matriz A**? Razona la respuesta.**

$|2A| = -8 = -1 \cdot 8 = -1 \cdot 2^3 = 2^3 \cdot |A|$. Si tenemos en cuenta la siguiente propiedad de los determinantes:

"Si multiplicamos una fila o una columna de una matriz por un nº, el determinante queda multiplicado por ese nº"; entonces, si A es una matriz cuadrada de orden n:

$|2A| = 2^n \cdot |A|$. En nuestro caso concreto, será $n = 3$.

Es decir, A es una matriz de orden 3.

32 **S** **Escribe dos matrices A y $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tales que:**

a) $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$

b) $det(A + B) = det(A) + det(B)$

a) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = 7$; $|B| = -11$; $|A + B| = 0 \neq |A| + |B| = -4$

b) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$; $|B| = 0$; $|A + B| = 0 = |A| + |B|$

33 **S** **Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Demuestra que $det(A) = 0$ o $det(A) = 1$.**

$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |A| \quad \to \quad |A|^2 - |A| = 0 \quad \to$

$\to \quad |A|(|A| - 1) = 0 \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases}$

(Hemos tenido en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$).

34 **S** **Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$?**

Justifica tu respuesta.

Tendremos en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Entonces:

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \underset{(*)}{=} |B| \cdot |A| = |B \cdot A|$. Por tanto, sí se verifica la igualdad.

(*) Aunque el producto de matrices no es conmutativo, el producto de números (los determinantes son números), sí lo es.

35 **Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿qué rango tendrá la matriz B?**

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m-a & n-b & p-c \end{pmatrix}$$

Observamos que la 3ª fila de B (la que hemos añadido respecto a A), es combinación lineal de las dos primeras (se obtiene restando la 2ª menos la 1ª). Por tanto, B tendrá el mismo rango que A, es decir, *ran* $(B) = 2$.

36 **Si llamamos c_1, c_2, c_3 a los vectores columna de una matriz A, el determinante puede designarse así: $det(A) = det(c_1, c_2, c_3)$.**

Si $det(A) = 5$, ¿cuál será el valor de estos determinantes?

a) $\boldsymbol{det(c_1 - 3c_2, c_2, c_3)}$

b) $\boldsymbol{det(c_1, c_2, 2c_3)}$

c) $\boldsymbol{det(c_1, c_1 - c_2, c_3)}$

a) $det(c_1 - 3c_2, c_2, c_3) \overset{(1)}{=} det(c_1, c_2, c_3) = 5$

(1) Sumamos a la 1ª columna la 2ª multiplicada por 3.

b) $det(c_1, c_2, 2c_3) \overset{(2)}{=} 2\ det(c_1, c_2, c_3) = 2 \cdot 5 = 10$

(2) Si multiplicamos una columna de una matriz por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) $det(c_1, c_1 - c_2, c_3) \overset{(3)}{=} det(c_1, -c_2, c_3) \overset{(2)}{=} -det(c_1, c_2, c_3) = -5$

(3) Restamos a la 2ª columna la 1ª.

37 **a) Define a qué se llama rango de una matriz.**

b) Indica, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

I) $\boldsymbol{ran(A) = ran(-A)}$ **(**$\boldsymbol{-A}$ **es la matriz opuesta de** $\boldsymbol{A}$**).**

II) $\boldsymbol{ran(A) = ran(A^t)}$ **(**$\boldsymbol{A^t}$ **es la matriz traspuesta de** $\boldsymbol{A}$**).**

III) $\boldsymbol{ran(A + B) = ran(A) + ran(B)}$

IV) $\boldsymbol{ran(A^2) = [ran(A)]^2}$

V) $\boldsymbol{ran(A) = ran(A^{-1})}$ **si** $\boldsymbol{A}$ **tiene inversa (**$\boldsymbol{A^{-1}}$ **es la matriz inversa de** $\boldsymbol{A}$**).**

a) El rango de una matriz es el número de filas (o de columnas) linealmente independientes. También podemos definirlo como el máximo orden de sus menores no nulos.

b) I) **Verdadera**. El hecho de cambiar de signo los elementos de A, solo afectará al signo de los menores; pero el máximo orden de los menores no nulos (el rango) no se ve influido.

II) **Verdadera**. El número de filas y el número de columnas linealmente independientes es el mismo. En A^t solo hemos cambiado filas por columnas.

III) **Falso**. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \to \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$ran\ (A) = ran\ (B) = 2$ (pues $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$) y $ran\ (A + B) = 1$.

IV) **Falso**. Por ejemplo, si A es una matriz de orden 2 y con $ran\ (A) = 2$, A^2 también será de orden 2; luego $ran\ (A^2) \leq 2$, y $[ran\ (A)]^2 = 2^2 = 4$ (si A^2 es de orden 2 *no* puede tener rango 4).

V) Si A es una matriz cuadrada de orden n, y existe su inversa, entonces $|A| \neq 0$ (y $|A^{-1}| \neq 0$). Luego, $ran\ (A) = ran\ (A^{-1}) = n$. Por tanto, la igualdad es **verdadera**.

Página 99

PARA PROFUNDIZAR

38 **S** **Demuestra, sin desarrollar el determinante, que:** $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

☛ ***Haz** $c_1 - c_3$ **y** $c_2 - c_3$**. Así podrás sacar factor común** $(a-b)^2$**. Después, haz** $c_1 - 2c_2$**.***

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overset{\text{COLUMNAS}}{\begin{matrix} 1^{\text{a}} - 3^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 3^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{matrix}} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & (a-b) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 (a+b-2b) = (a-b)^2 (a-b) = (a-b)^3$$

(1) Sacamos $(a-b)$ factor común de la 1ª y de la 2ª columna.

(2) Desarrollamos por la 3ª fila.

39 **Demuestra, sin desarrollar, que:** $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$

☛ ***En el segundo miembro multiplica y divide la primera fila por** a**, la segunda por** b **y la tercera por** c**.***

Procediendo como se indica en la ayuda, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} bca & a^2 & a^3 \\ acb & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

40 **Prueba que:** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

☛ ***Este determinante se llama de Vandermonde.***

Haz** $c_2 - c_1$ **y** $c_3 - c_1$**. Extrae el factor** $(b-a)$ **de la 2ª columna y** $(c-a)$ **de la 3ª columna.

Siguiendo las indicaciones dadas, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

41 **S** **Determina las matrices cuadradas de orden 2 cuyos elementos sean números enteros, con determinante igual a –1, y tal que su inversa coincida con su traspuesta.**

☛ ***Haz*** $A \cdot A^t = I$ ***y*** $|A| = -1$.

Hay 4 soluciones.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Si $A^t = A^{-1}$, ha de ser:

$$A \cdot A^t = I \;\to\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\to$$

$$\left.\begin{array}{rr} & a^2+b^2 = 1 \\ & ac+bd = 0 \\ & ac+bd = 0 \\ & c^2+d^2 = 1 \\ \text{Como } |A| = -1 \;\to & ad-bc = -1 \end{array}\right\}$$

Como a, b, c, d son enteros, tenemos solo cuatro soluciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

42 **Demostración de que** $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ **para determinantes de orden 2:**

$$|AB| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}}_{(1)} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}}_{(2)} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}}_{(3)} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}}_{(4)}$$

a) Comprueba que (1) y (4) son ambos cero.

b) En (2) y en (3) saca factor común los elementos b_{ij}. **Llegarás a** $|A| \cdot |B|$**, como se quería demostrar.**

a) (1) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} = a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} = 0$

$$(4)\ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} = a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} = 0$$

b) $$(2)\ \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\ |A|$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -b_{21}b_{12}\ |A|$$

Por tanto, queda:

$$|AB| = 0 + b_{11}b_{22}\ |A| - b_{21}b_{12}\ |A| + 0 = |A|\ (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) =$$

$$= |A| \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

43 **La sucesión $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, \dots$ tiene la peculiaridad de que cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores:**

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

para $n \geq 3$.

a) Demuestra por el método de inducción que:

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

☛ ***Comprueba que $a_1 = 1$ y que $a_2 = 2$. Comprueba que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, desarrollando el determinante por la 1ª columna.***

b) Teniendo en cuenta lo anterior, di el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) $a_1 = |1| = 1;\ \ a_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$a_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n} \underset{(1)}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-1} \underset{(2)}{=} a_{n-1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{orden } n-2} = a_{n-1} + a_{n-2}$$

(1) Desarrollamos por la 1ª columna.

(2) Desarrollamos el 2º determinante por la 1ª fila.

b) El determinante dado es el término a_8 de la sucesión anterior. Lo hallamos:

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 8,\ a_6 = 13,\ a_7 = 21,\ a_8 = 34$

Por tanto:

$$a_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 34$$