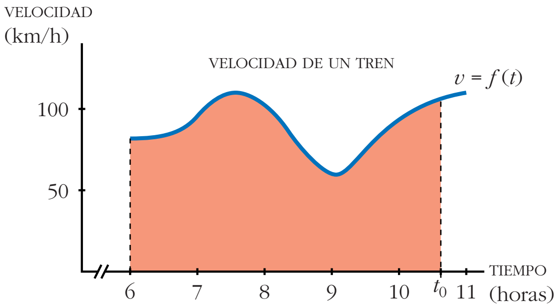
UNIDAD 14 LA INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

Página 378

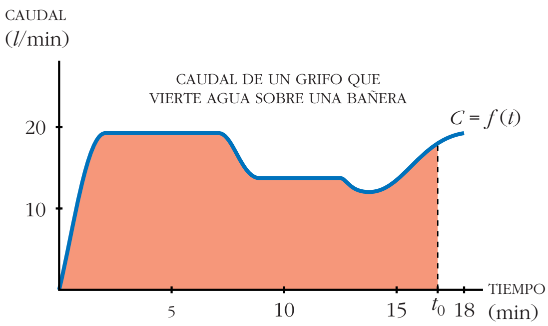
Problema 1

- **Interpreta lo que significa el área bajo la curva en cada uno de los siguientes casos:**



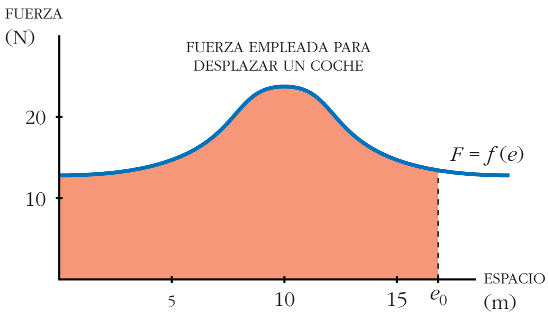
- Gráfica 1:

  Espacio recorrido entre el tiempo 6 horas y el tiempo t_0.



- Gráfica 2:

  Volumen de agua recogido en t_0 minutos.

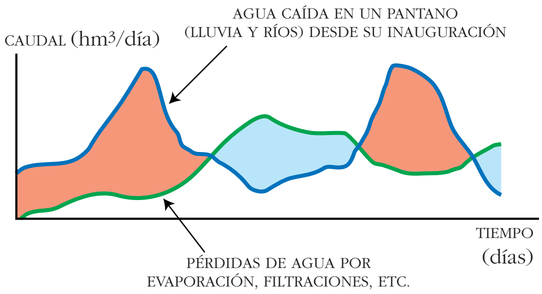


- Gráfica 3:

  Trabajo realizado al desplazar el coche e_0 metros.

Problema 2

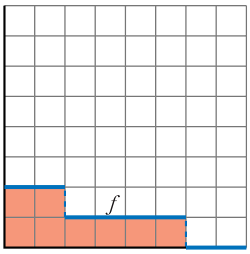
- **Interpreta lo que significa el área entre las dos curvas en la siguiente gráfica. Distingue las áreas en azul y en rojo.**

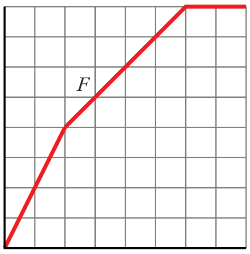


- Las áreas azules representan la diferencia de volumen entre las pérdidas de agua y el agua caída.

- Las áreas rojas representan la diferencia de volumen entre el agua caída y las pérdidas de agua.

Problema 3





$F(1) = 2$ **porque** ***el área bajo f entre 0 y 1 es 2.***

$F(2) = 4$ **porque** ***el área bajo f entre 0 y 2 es 4.***

$F(5) = 7$ **porque** ***el área bajo f entre 0 y 5 es 7.***

- **Comprueba las afirmaciones anteriores y observa que "cuanto mayor es $f(a)$, más rápidamente crece $F(a)$".**

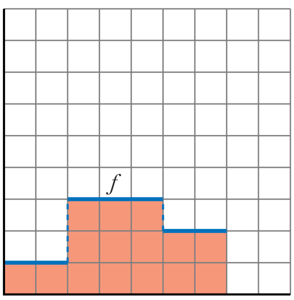
La solución se encuentra en el mismo ejercicio.

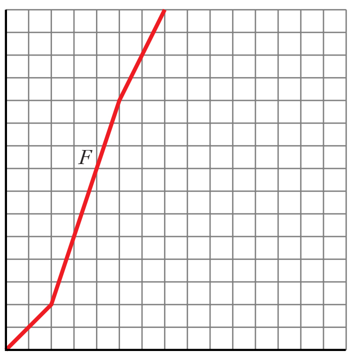
Página 379

Problema 4

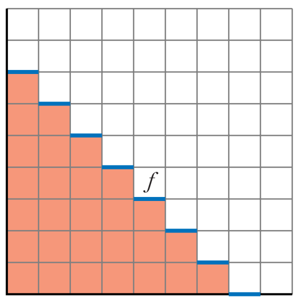
- **Dibuja aproximadamente la función "área bajo f" para cada una de las siguientes funciones:**

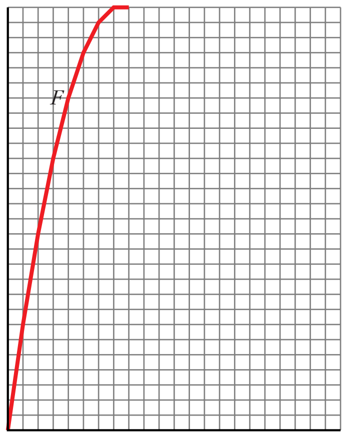
a)



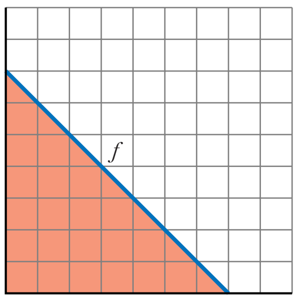


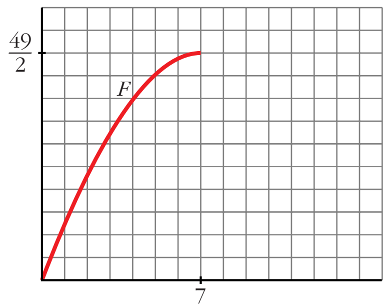
b)





c)





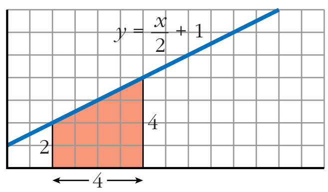
Página 383

1. Halla gráficamente las siguientes integrales:

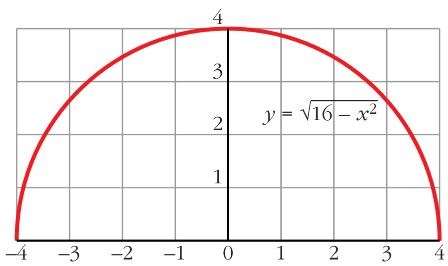
a) $\displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\, dx$

a) Es un trapecio cuyas bases miden 2 y 4 y cuya altura mide 4.

$$\text{Área} = \frac{2 + 4}{2} \cdot 4 = 12 \text{ u}^2$$



b) $y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$ (Circunferencia)



El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 4 u.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 =$$

$$= \frac{16}{2} \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25{,}1 \text{ u}^2$$

2. **Halla gráficamente las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_{-4}^{4}(\sqrt{16-x^2}+4)\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-4}^{4}(4-\sqrt{16-x^2})\,dx$

a) $\displaystyle\int_{-4}^{4}(\sqrt{16-x^2}+4)\,dx = \int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx + \int_{-4}^{4}4\,dx$

Llamamos $I_1 = \displaystyle\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$ e $I_2 = \displaystyle\int_{-4}^{4}4\,dx$.

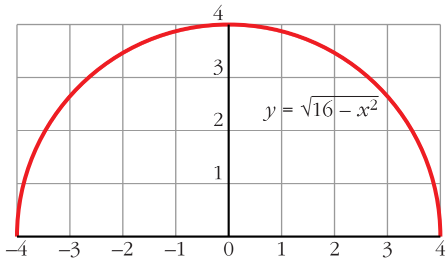
Resolvemos gráficamente ambas integrales para posteriormente sumar los resultados.

I_1: $y=\sqrt{16-x^2} \Rightarrow y^2 = 16-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=4^2$ (circunferencia)

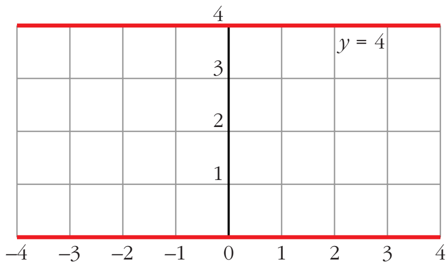
El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 4 u.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 4^2 =$$

$$= \frac{16}{2}\cdot\pi = 8\cdot\pi = 25{,}1\ \text{u}^2$$



I_2: Se trata de un rectángulo de dimensiones 8 u × 4 u. Por tanto, su área es 32 u^2.



Finalmente, $I_1 + I_2 = 25{,}1 + 32 = 57{,}1$ u^2.

b) $\displaystyle\int_{-4}^{4}(4-\sqrt{16-x^2})\,dx = \int_{-4}^{4}4\,dx - \int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

Observamos que se trata de las mismas integrales que en el apartado a), solo que ahora es $I_2 - I_1$, dando como resultado $32 - 25{,}1 = 6{,}9$ u^2.

Página 387

1. **Sea la función: $F(x) = \displaystyle\int_0^x log(t^2+4)\,dt$. Calcula $F'(x)$.**

$F(x) = \displaystyle\int_0^x log(t^2+4)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$, siendo $f(t) = log(t^2+4)$ continua.

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x) = log(x^2+4)$$

2. Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = [\mathrm{sen}\, x]_0^{\pi/2} = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} - \mathrm{sen}\, 0 = 1 - 0 = 1$$

Página 388

1. Calcula: $\displaystyle\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3)\, dx$

$$I = \left[x^4 - \frac{4}{5}x^5 - 3x\right]_1^6 = \left(6^4 - \frac{4}{5}\cdot 6^5 - 3\cdot 6\right) - \left(1^4 - \frac{4}{5}\cdot 1^5 - 3\cdot 1\right) =$$

$$= -4942{,}8 + 2{,}8 = -4940$$

2. Calcula: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

$$I = [\mathrm{arc\ tg}\, x]_0^1 = \mathrm{arc\ tg}\, 1 - \mathrm{arc\ tg}\, 0 = \frac{\pi}{4}$$

Observación: $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$

Página 390

1. Halla el área comprendida entre la función $y = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje X.

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - x^2 - 6x = 0$

Son -2, 0 y 3.

II. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - x^2 - 6x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

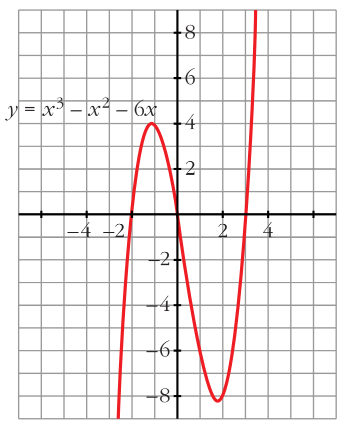
III. $G(-2) = \dfrac{-16}{3}$, $G(0) = 0$, $G(3) = \dfrac{-63}{4}$

IV. $G(0) - G(-2) = \dfrac{16}{3}$

$G(3) - G(0) = \dfrac{-63}{4}$

El área buscada es: $\dfrac{16}{3} + \left|\dfrac{-63}{4}\right| = \dfrac{253}{12}\ \mathrm{u}^2$

(Se incluye la gráfica para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



2. Halla el área comprendida entre las funciones $y = x^4 + x^3$ e $y = x^4 + x^2 + 6x$.

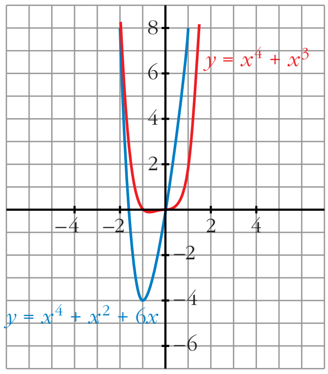
Se obtiene la función diferencia:

$$y = (x^4 + x^3) - (x^4 + x^2 + 6x) = x^3 - x^2 - 6x$$

Ahora se calcula el área comprendida entre esta función y el eje X, lo cual se ha hecho ya en el ejercicio anterior.

Por lo tanto, el área buscada es $\dfrac{253}{12}$ u^2.

(También aquí es innecesaria la gráfica para obtener el área buscada).



Página 391

1. Calcula el volumen de una esfera de radio 5 cm haciendo girar la semicircunferencia $y = \sqrt{25 - x^2}$ alrededor del eje X. ¿Qué límites de integración debes tomar?

$$V = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-5}^{5} (25 - x^2)\,dx = \pi \cdot \left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5} = \pi \cdot \frac{500}{3} \text{ u}^3$$

Observación: El volumen del cuerpo engendrado por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, al girar alrededor del eje X es:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \text{ u}^3$$

Página 397

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Calcula el área comprendida entre la curva: $y = 3x^2 - x + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $3x^2 - x + 1 = 0$

No tiene soluciones, por lo que no corta al eje X.

II. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

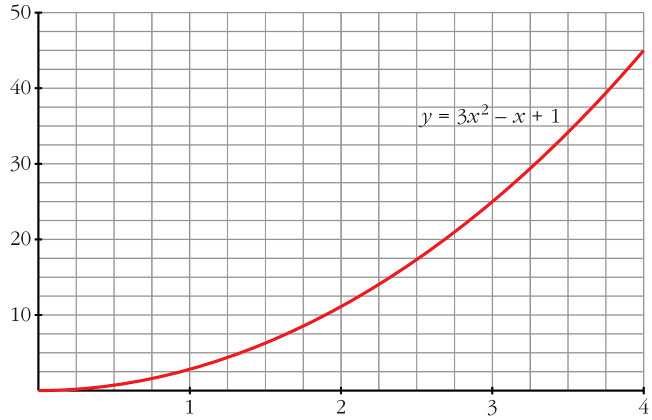
$$G(x) = \int (3x^2 - x + 1)\,dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $G(0) = 0$, $G(4) = 60$

IV. $G(4) - G(0) = 60$

El área buscada es 60 u^2.

(La gráfica la hemos incluido para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



2 **Calcula el área bajo la curva $y = 3x - 2$ entre $x = -1$ y $x = 1$.**

I. Hallamos la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$. Es $\frac{2}{3}$.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y la raíz que hay entre ellos: $-1, \frac{2}{3}, 1$.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

$$G(x) = \int (3x - 2)\,dx = \frac{3x^2}{2} - 2x$$

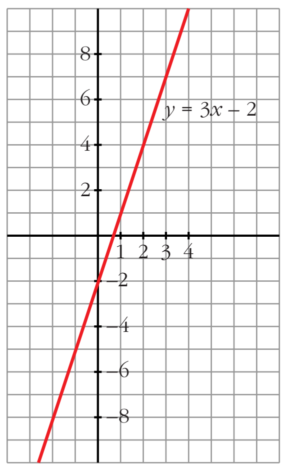
IV. $G(-1) = \frac{7}{2}$, $G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3}$, $G(1) = \frac{-1}{2}$

V. $G\left(\frac{2}{3}\right) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{7}{2} = \frac{-25}{6}$

$G(1) - G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

El área buscada es: $\left|\frac{-25}{6}\right| + \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener su area).



3 **Halla el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.**

I. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

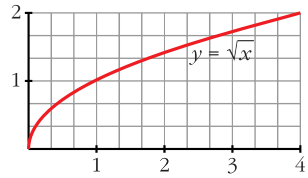
$$G(x) = \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$$

II. $G(0) = 0$, $G(4) = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$

III. $G(4) - G(0) = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$

El área buscada es: $\frac{16}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el area).



4 **Halla el área comprendida entre $y = x^2 - 5$ e $y = -x^2 + 5$.**

I. Buscamos las soluciones de: $x^2 - 5 = -x^2 + 5$. Son $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Se obtiene la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 5) - (x^2 - 5) = -2x^2 + 10$$

III. Buscamos su primitiva:

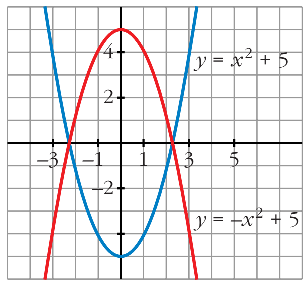
$$G(x) = \int (-2x^2 + 10)\,dx = \frac{-2x^3}{3} + 10x$$

IV. $G(-\sqrt{5}) = \frac{-20}{3}\sqrt{5}$, $G(\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5}$

V. $G(\sqrt{5}) - G(-\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5} + \frac{20}{3}\sqrt{5} = \frac{40}{3}\sqrt{5}$

El área buscada es: $\frac{40}{3}\sqrt{5}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el área).



5
S **Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:**

a) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$

b) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; $y = x$

d) $y = x(x-1)(x-2)$; $y = 0$

e) $y = x^2$; $y = 1$

f) $y = x^2 - 2x$; $y = -x^2 + 4x$

g) $y = -x^2 + 4x - 4$; $y = 2x - 7$

a) I. Buscamos las soluciones de $4 - x^2 = 8 - 2x^2$. Son -2 y 2.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) = 4 - x^2$$

III. Calculamos su primitiva:

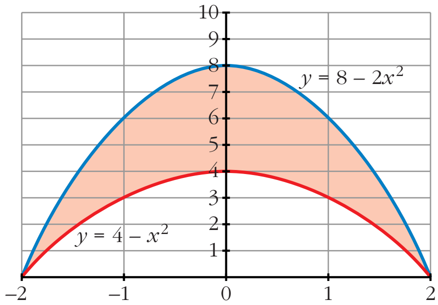
$$G(x) = \int (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

IV. $G(-2) = -8 + \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$

$G(2) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

V. $G(2) - G(-2) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$

El área buscada es: $\frac{32}{3}$ u^2.



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 4 - x^2$.

Son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$

III. Calculamos su primitiva:

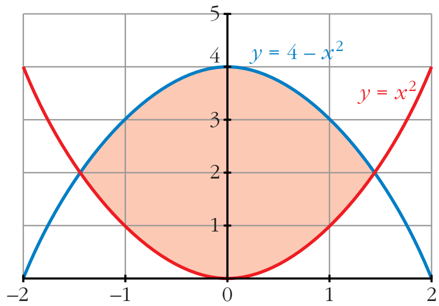
$G(x) = \int (4 - 2x^2)\,dx = 4x - \frac{2x^3}{3}$

IV. $G(-\sqrt{2}) = \frac{-8\sqrt{2}}{3}$, $G(\sqrt{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

V. $G(\sqrt{2}) - G(-\sqrt{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

El área buscada es: $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para hallar el área).



c) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - 3x^2 + 3x = x$. Son 0, 1 y 2.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (x^3 - 3x^2 + 3x) - x = x^3 - 3x^2 + 2x$

III. Calculamos su primitiva:

$G(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$

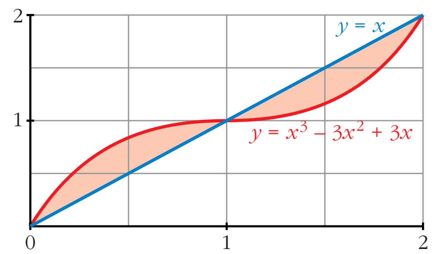
IV. $G(0) = 0, \quad G(1) = \frac{1}{4}, \quad G(2) = 0$

$G(1) - G(0) = \frac{1}{4}$

$G(2) - G(1) = \frac{-1}{4}$

El área buscada es: $\frac{1}{4} + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{2}$ u^2.

(La gráfica que se adjunta es para entender mejor el ejercicio, pero es innecesaria para obtener el área).



d) I. Buscamos las soluciones de: $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 0$. Son 0, 1 y 2.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$

III. Calculamos su primitiva:

$G(x) = \int x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$

Resulta que se trata del mismo ejercicio que el apartado c).

El área buscada es: $\frac{1}{2}$ u^2.

e) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 1$. Son -1 y 1.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = x^2 - 1$

III. Calculamos su primitiva:

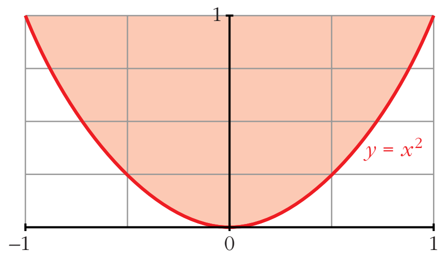
$G(x) = \int (x^2 - 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x$

IV. $G(-1) = \frac{2}{3}, \quad G(1) = \frac{-2}{3}$

V. $G(1) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$

El área buscada es: $\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).



f) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 - 2x = -x^2 + 4x$. Son 0 y 3.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (x^2 - 2x) - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 6x$$

III. Calculamos su primitiva:

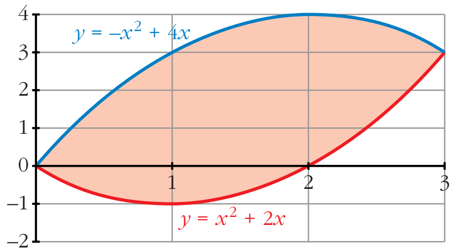
$$G(x) = \int (2x^2 - 6x)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2$$

IV. $G(0) = 0$, $G(3) = -9$

V. $G(3) - G(0) = -9$

El área buscada es: $|-9| = 9$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria).



g) I. Buscamos las soluciones de: $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7$. Son -1 y 3.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 4x - 4) - (2x - 7) = -x^2 + 2x + 3.$$

III. Calculamos su primitiva:

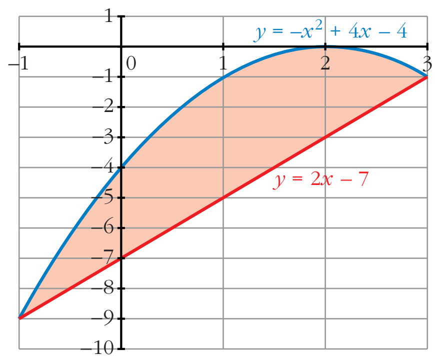
$$G(x) = \int (-x^2 + 2x + 3)\, dx = \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x$$

IV. $G(-1) = \frac{-5}{3}$, $G(3) = 9$

V. $G(3) - G(-1) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$

El área buscada es: $\frac{32}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



6 S **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = (x - 1)^2 (x + 1)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.**

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $(x - 1)^2 \cdot (x + 1) = 0$. Son -1 y 1.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y las raíces que hay entre ellos: 1, 2.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

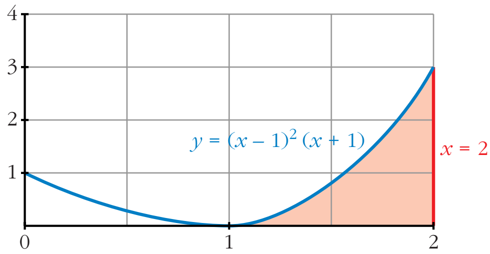
$$G(x) = \int (x - 1)^2 \cdot (x + 1)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

IV. $G(1) = \frac{5}{12}$, $G(2) = \frac{4}{3}$

V. $G(2) - G(1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$

El área buscada es $\frac{11}{12}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).



7 Halla el área limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$.

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x = x^4$. Son 0 y 1.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = x^2 - \sqrt{x}$$

III. Buscamos su primitiva:

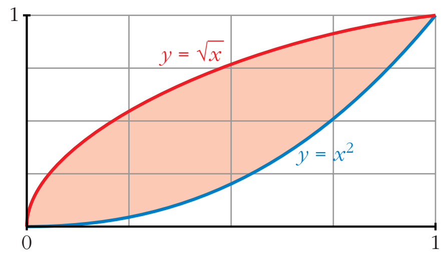
$$G(x) = \int \left(x^2 - \sqrt{x}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

IV. $G(0) = 0$, $G(1) = \frac{-1}{3}$

V. $G(1) - G(0) = \frac{-1}{3} - 0 = \frac{-1}{3}$

El área buscada es $\left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



8 S Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \frac{x}{x^2 - 2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.

I. Hallamos la solución de $\frac{x}{x^2 - 2} = 0$. Es 0.

II. Como esta solución se encuentra fuera del intervalo de integración, los extremos son 2 y 3.

III. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$, la cual es continua en dicho intervalo:

$$G(x) = \int \frac{x}{x^2 - 2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot ln\, |x^2 - 2|$$

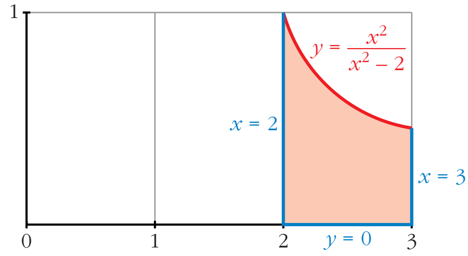
IV. $G(2) = \frac{1}{2} \cdot ln\,(2)$, $G(3) = \frac{1}{2} \cdot ln\,(7)$

V. $G(3) - G(2) = \dfrac{1}{2} \cdot [ln\ (7) - ln\ (2)]$

El área buscada es:

$$\frac{1}{2} \cdot [ln\ (7) - ln\ (2)]\ \text{u}^2.$$

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



9 **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos siguientes:**

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ **entre** $x = 1$ **y** $x = 5$

b) $f(x) = x^2$ **entre** $x = -1$ **y** $x = 2$

c) $f(x) = x - x^2$ **entre** $x = 0$ **y** $x = 1$

a) $V = \pi \cdot \displaystyle\int_1^5 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^5 (x-1)\ dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 = 8\pi\ \text{u}^3.$

b) $V = \pi \cdot \displaystyle\int_{-1}^2 (x^2)^2\ dx = \pi \cdot \int_{-1}^2 x^4\ dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \pi \cdot \frac{31}{5}\ \text{u}^3.$

c) $V = \pi \cdot \displaystyle\int_0^1 (x - x^2)^2\ dx = \pi \cdot \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\ dx =$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{30}\ \text{u}^3.$$

10 **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos limitados por las gráficas que se indican:**

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ **b)** $y^2 = 4x$, $x = 4$

a) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $\sqrt{x} = x^2$. Son 0 y 1.

Estos son nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = \sqrt{x} - x^2$$

III. $V = \pi \cdot \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)^2 dx = \pi \int_0^1 (x + x^4 - 2x^{5/2}) dx =$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} - \frac{4}{7}x^{7/2}\right]_0^1 = \frac{9}{70}\pi\ \text{u}^3$$

b) $V = \pi \cdot \displaystyle\int_0^4 f(x)^2\ dx = \pi \cdot \int_0^4 (4x)^2 dx = \pi \cdot \left[8x^2\right]_0^4 = 128\pi\ \text{u}^3$

11 **S** **Calcula:** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} sen\ x\ cos\ x\ dx$

$$\int_0^{\pi/4} sen\ x \cdot cos\ x\ dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4}$$

Aplicamos el siguiente cambio:

$sen\ x = t; \quad cos\ x \cdot dx = dt$

para $x = 0; \quad t = 0$

para $x = \dfrac{\pi}{4}; \quad t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12 **S** **Halla el valor de la integral definida de la función** $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 3\ cos\ (2\pi x)$ **en el intervalo** $I = [0, 2]$**.**

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} - 3 \cdot cos\ (2\pi x)\right) dx = \left[ln\ (x+1) - \frac{3 \cdot sen\ (2\pi x)}{2 \cdot \pi}\right]_0^2 =$$

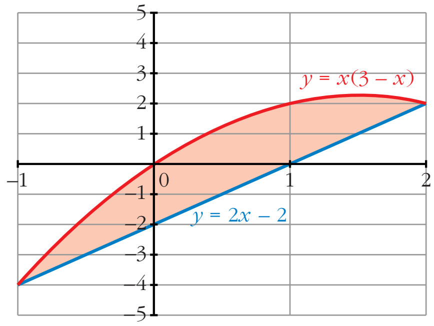
$$= ln\ (3) - ln\ (1) = ln\ (3)$$

PARA RESOLVER

13 **S** **a) Dibuja la región limitada por la curva** $y = x(3 - x)$ **y la recta** $y = 2x - 2$**.**

b) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

a)



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x \cdot (3 - x) = 2x - 2$. Son -1 y 2.

II. Calculamos la función diferencia:

$$f(x) = x \cdot (3 - x) - (2x - 2) = -x^2 + x + 2$$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (-x^2 + x + 2)\,dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$$

IV. $G(-1) = \frac{-7}{6}, \quad G(2) = \frac{10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$

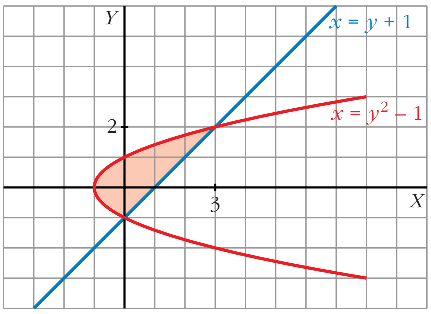
El área buscada es $\frac{9}{2}$ u^2.

14 **Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y por la recta paralela a $y = x$ que pasa por el punto (1, 0). Calcula el área de ese recinto.**

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $y^2 - 1 = y + 1$.

(Esta ecuación resulta de despejar la x en: $y^2 - x = 1$; $y = x - 1$).

Sus soluciones son $y = -1$ y 2.



II. Calculamos la función diferencia:

$$x = (y^2 - 1) - (y + 1) = y^2 - y - 2$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(y) = \int (y^2 - y - 2)\,dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y$$

IV. $G(-1) = \frac{7}{6}, \quad G(2) = \frac{-10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \frac{-10}{3} - \frac{7}{6} = \frac{-9}{2}$

El área buscada es $\left|\frac{-9}{2}\right| = \frac{9}{2}$ u^2.

15 **Comprueba que $\int_0^2 |2x - 1|\,dx = \frac{5}{2}$.**

$$\int_0^2 |2x - 1| \cdot dx = \int_0^{1/2} (-2x + 1)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\,dx =$$

$$= \left[-x^2 + x\right]_0^{1/2} + \left[x^2 - x\right]_{1/2}^2 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

16 **Halla el área limitada por la función $y = 2x - x^2$ y sus tangentes en los puntos en los que corta al eje de abscisas.**

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $2x - x^2 = 0$. Son 0 y 2.

II. Calculamos la derivada de $f(x) = 2x - x^2$, que es $f'(x) = 2 - 2x$.

La tangente que pasa por $(0, 0)$ tiene pendiente $f'(0) = 2$, por tanto es $y = 2x$.

La tangente que pasa por $(2, 0)$ tiene pendiente $f'(2) = -2$, por tanto es $y = -2x + 4$.

III. Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: entre 0 y 1 y entre 1 y 2.

La función diferencia en el primer intervalo es:

$$f_1(x) = 2x - (2x - x^2) = x^2$$

y en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = -2x + 4 - (2x - x^2) = x^2 - 4x + 4$$

IV. Sus primitivas son:

$$G_1(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

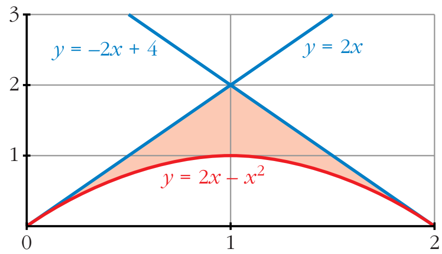
$$G_1(x) = \int (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

V. $G_1(0) = 0$, $G_1(1) = \frac{1}{3}$, $G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3}$

$G_2(1) = \frac{7}{3}$, $G_2(2) = \frac{8}{3}$, $G_2(2) - G_2(1) = \frac{1}{3}$

El área buscada es: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



17 **Dadas la hipérbola $xy = 6$ y la recta $x + y - 7 = 0$, calcula el área limitada por la recta y la hipérbola.**

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $7 - x = \frac{6}{x}$. Son 1 y 6 (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = 7 - x - \frac{6}{x}$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int \left(7 - x - \frac{6}{x}\right) = 7x - \frac{x^2}{2} - 6 \cdot ln\ |x|$$

IV. $G(1) = 7 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{2}$

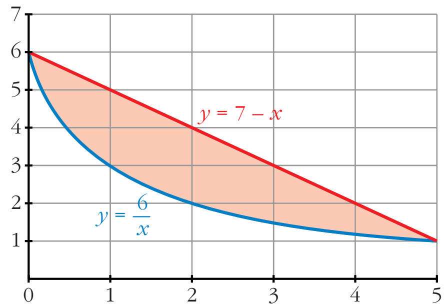
$G(6) = 24 - 6 \cdot ln\ (6)$

V. $G(6) - G(1) = 24 - 6 \cdot ln\ (6) - \dfrac{13}{2} = \dfrac{35}{2} - 6 \cdot ln\ (6)$

El área buscada es:

$$\frac{35}{2} - 6 \cdot ln\ (6)\ u^2.$$

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



18 **Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.**

I. Calculemos la ecuación de la recta tangente en el punto $(0, 0)$, para ello calculamos la derivada de nuestra función:

$y' = 3x^2 - 4x + 1$

$y'(0) = 1$ (pendiente)

La recta tangente tiene por ecuación $y = x$.

II. Calculamos las soluciones de: $x^3 - 2x^2 + x = x$. Son 0 y 2 (límites de integración).

III. Obtenemos la función diferencia:

$y = x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2$

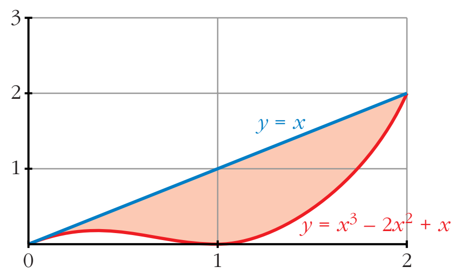
IV. Buscamos su primitiva: $G(x) = \displaystyle\int (x^3 - 2x^2)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$

V. $G(0) = 0$, $G(2) = \dfrac{-4}{3}$

$G(2) - G(0) = \dfrac{-4}{3}$

El área buscada es: $\left|\dfrac{-4}{3}\right| = \dfrac{4}{3}\ u^2.$

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



Página 398

19 **S** **Halla el área comprendida entre la curva $y = \dfrac{4}{9 + 2x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.**

I. Buscamos los puntos de inflexión, para ello, calculamos las dos primeras derivadas:

$$y' = \frac{-16x}{(9 + 2x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{-16 \cdot (9 + 2x^2 - 8x^2)}{(9 + 2x^2)^3}$$

Igualamos a cero para encontrar en qué valores de x la segunda derivada es cero.

Esto ocurre en $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ y $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (puntos de inflexión).

II. Calculamos la primitva de nuestra función:

$$G(x) = \int \frac{4}{9 + 2x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)$$

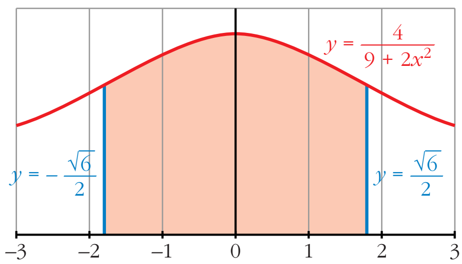
III. $G\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$G\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) - G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\ tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\ tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

El área buscada es: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\ tg \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\ tg \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).

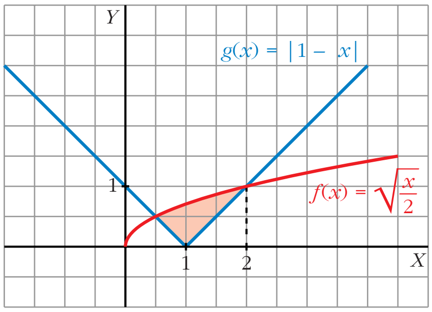


20 **S** **Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$ y $g(x) = |1 - x|$:**

a) Dibuja las dos gráficas en un mismo plano y halla sus puntos de intersección.

b) Determina el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.

a) $g(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \le 1 \\ x - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$



Buscamos los puntos de intersección resolviendo la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = (1 - x)$$

Sus soluciones son $\frac{1}{2}$ y 2. (Límites de integración).

b) Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: $\frac{1}{2}$ a 1 y 1 a 2.

I. La función diferencia en el primer intervalo es:

$$h_1(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (1 - x)$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$h_2(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (x - 1)$$

II. Sus primitivas son:

$$H_1(x) = \int \left(\sqrt{\frac{x}{2}} + x - 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$H_2(x) = \int \left(\sqrt{\frac{x}{2}} - x + 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $H_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$; $H_1(1) = \frac{2\sqrt{2} - 3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

$H_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$, $H_2(2) = \frac{4}{3}$

IV. $H_1(1) - H_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24}$

$H_2(2) - H_2(1) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

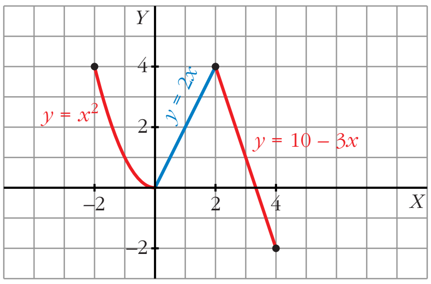
El área buscada es $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$ u^2.

21 **S** **Se considera la función:**

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 2x & \text{si } \ 0 \le x < 2 \\ 10 - 3x & \text{si } \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Representa la función g y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx \qquad J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx \qquad K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx$

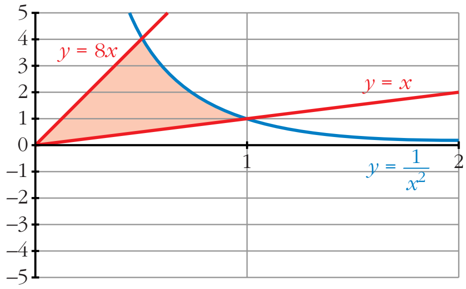


$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + [x^2]_0^1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

$$J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx = \int_{1}^{2} 2x\,dx + \int_{2}^{4} (10 - 3x)\,dx = [x^2]_1^2 + \left[10x - \frac{3x^2}{2}\right]_2^4 = 5$$

$$K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx = I + J = \frac{11}{3} + 5 = \frac{26}{3}$$

22 **S** **Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, y halla su área.**



I. Buscamos los puntos de intersección de las funciones:

$\dfrac{1}{x^2} = x$: Solución $x = 1$.

$\dfrac{1}{x^2} = 8x$: Solución $x = \dfrac{1}{2}$.

$x = 8x$: Solución $x = 0$.

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ a 1.

II. Hallamos la función diferencia en el primer intervalo:

$$f_1(x) = 8x - x$$

Y en el segundo intervalo:

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} - x$$

III. Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \int (8x - x)\, dx = \frac{7x^2}{2}$$

$$G_2(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx = \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2}$$

IV. $G_1(0) = 0,\quad G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-17}{8},\quad G_2(1) = \frac{-3}{2}$$

V. $G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(0) = \frac{7}{8}$

$$G_2(1) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

El área buscada es $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ u^2.

23
S **Calcula el área del recinto plano limitado por la curva $y = x^2 e^x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.**

Buscamos una primitiva a nuestra función:

$$G(x) = \int x^2 \cdot e^x\, dx = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$$

(aplicando el método de integración por partes).

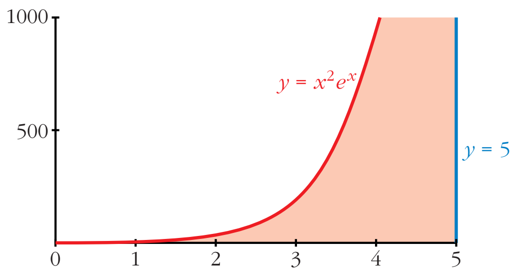
$$G(0) = 2$$

$$G(5) = 17 \cdot e^5$$

$$G(5) - G(0) = 17 \cdot e^5 - 2$$

El área buscada es $(17 \cdot e^5 - 2)$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



24 **S** **Halla el polinomio de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), sabiendo que el área limitada por esa curva, el eje Y y el eje X positivo es 4/3.**

Como el polinomio pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(3, 0)$, una raíz es $x = 3$, por tanto: $y = (x - 3) \cdot (ax - b)$

Por otro lado, cuando $x = 0$, $y = 1$, así: $1 = -3 \cdot (-b) = 3b$, $b = \frac{1}{3}$

Quedando: $y = (x - 3) \cdot \left(ax - \frac{1}{3}\right)$

Puesto que pasa por los puntos indicados y está limitado por los ejes X e Y (positivos), los límites de integración son 0 y 3.

Así, buscamos la primitiva del polinomio:

$$G(x) = \int (x - 3) \cdot \left(ax - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{ax^3}{3} - 3a\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^2 + x$$

$$G(0) = 0$$

$$G(3) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3$$

$$G(3) - G(0) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3 = \frac{4}{3}$$

De donde sacamos que $a = \frac{1}{27}$

Por tanto, el polinomio es: $y = (x - 3) \cdot \left(\frac{1}{27}x - \frac{1}{3}\right)$

25 **S** **Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.**

Buscamos el punto donde la curva tiene un extremo, hallando su derivada e igualando a cero: $y' = 2x + 2 = 0$, el punto es $(-1, 1)$.

La ecuación de la recta tangente en dicho punto es $y = 1$.

Por otro lado, la ecuación de la recta tangente con pendiente 6 es $y = 6x - 2$.

Buscamos los puntos de corte de la curva con ambas rectas, de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 1$ es $(-1, 1)$; de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 6x - 2$ es $(2, 10)$; y de $y = 1$ con $y = 6x - 2$ es $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Distinguimos dos intervalos de integración: de -1 a $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ a 2.

En el primer intervalo la función diferencia es:

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 2x + 1$$

En el segundo:

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 2 - (6x - 2) = x^2 - 4x + 4$$

Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

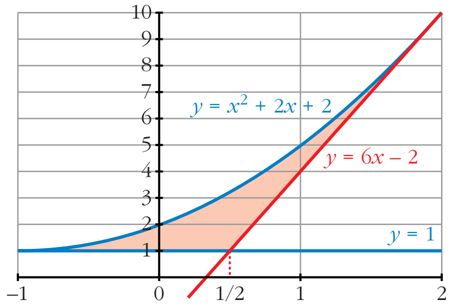
$$G_1(-1) = \frac{-1}{3},\ G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{24}$$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{24},\quad G_2(2) = \frac{8}{3}$$

$$G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(-1) = \frac{19}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{8}$$

$$G_2(2) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{37}{24} = \frac{9}{8}$$

El área buscada es: $\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$ u^2.



26 **S** **De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$.**

Calcula a, b, c y d.

Sabemos que pasa por el punto (0, 0), es decir, $f(0) = 0$, de donde averiguamos que $d = 0$.

Por otro lado, sabemos que tiene un máximo relativo en $x = 1$, esto es que $f'(1) = 0$, es decir: $3a + 2b + c = 0$.

También tiene un punto de inflexión en (0, 0), por lo que $f''(0) = 0$, de donde $b = 0$.

Como $3a + 2b + c = 0$ y $b = 0$, se tiene que $3a + c = 0 \rightarrow c = -3a$.

Así, nuestra función queda reducida a la función: $f(x) = ax^3 - 3ax$.

Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0, \quad G(1) = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{5a}{4}$$

$$G(1) - G(0) = -\frac{5a}{4}$$

El resultado es $-\frac{5a}{4}$ que es igual a $\frac{5}{4}$, de donde deducimos que $a = -1$ y por tanto $c = 3$.

La función buscada es $f(x) = -x^3 + 3x$.

27 **S** **Teniendo en cuenta que la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$ toma valores positivos y negativos, halla el valor de k de forma que el área de la región limitada por el eje X, las rectas $x = -1$, $x = 2$ y la curva $f(x)$ quede dividida por el eje X en dos partes con igual área.**

Supongamos que $x = a$ comprendido entre -1 y 2 es el punto donde nuestra función corta al eje X, por tanto tenemos que distinguir dos intervalos de integración: de -1 a a y de a a 2.

Buscamos una primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \frac{2x^4}{4} - x^3 + kx = \frac{x^4}{2} - x^3 + kx$$

$$G(-1) = \frac{3}{2} - k$$

$$G(2) = 2k$$

Si suponemos que en el primer intervalo la función es negativa, el área es:

$$G(-1) - G(a)$$

y en el segundo intervalo al función es positiva, el área es:

$$G(2) - G(a)$$

Y como el área en los dos intervalos tiene que ser igual, se tiene la siguiente igualdad:

$$G(-1) - G(a) = G(2) - G(a)$$

es decir:

$$G(-1) = G(2)$$

$$\frac{3}{2} - k = 2k$$

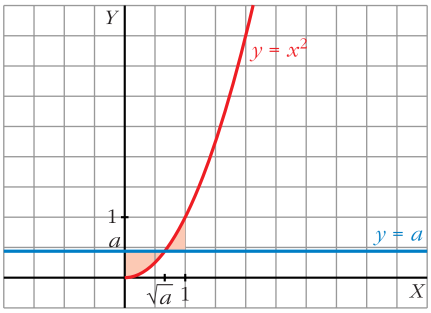
$$k = \frac{1}{2}$$

Observar que se obtiene el mismo resultado independientemente de qué intervalo consideremos en el que la función es positiva o negativa.

28 **S** **Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde $0 < a < 1$. Ambas curvas se cortan en el punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Halla a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.**

El punto de corte es $(\sqrt{a}, a)$.

Dibujamos las áreas para tener una idea más clara de nuestro ejercicio:



Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\sqrt{a}$ y de $\sqrt{a}$ a 1.

La función diferencia para el primer intervalo es:

$$f_1(x) = a - x^2$$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = ax - \frac{x^3}{3}$$

$$G_1(0) = 0, \quad G_1(\sqrt{a}) = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área en el primer intervalo es $\frac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = x^2 - a$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - ax$$

$$G_2(\sqrt{a}) = \frac{a\sqrt{a}}{3} - a\sqrt{a}, \quad G_2(1) = \frac{1}{3} - a$$

$$G_2(1) - G_2(\sqrt{a}) = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área en el segundo intervalo es $\frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

Como el área en los dos intervalos es igual, se tiene que:

$$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

De donde obtenemos que $a = \frac{1}{3}$

29 S **Sean $y = ax^2$ e $y = ax + a$ las ecuaciones de una parábola p y de una recta r, respectivamente. Demuestra las siguientes afirmaciones:**

a) Los puntos de corte de p y r no dependen del valor de a.

b) Si se duplica el valor de a, también se duplica el área encerrada entre p y r.

a) Los puntos de corte se obtienen al igualar ambas ecuaciones:

$$ax^2 = ax + a$$

$$ax^2 - ax - a = 0$$

$$a \cdot (x^2 - x - 1) = 0$$

Como suponemos $a \neq 0$, para que sean ciertamente una parábola y una recta, dividiendo toda la ecuación entre a, llegamos a:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

y sus soluciones son: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (las cuales no dependen de a).

b) La función diferencia es: $f(x) = ax + a - ax^2 = a \cdot (-x^2 + x + 1)$

Si llamamos $h(x) = -x^2 + x + 1$, se tiene que: $f_1(x) = a \cdot h(x)$

y la primitiva de $f(x)$ es a por la primitiva de $h(x)$, es decir:

$$G_1(x) = a \cdot H(x)$$

El área comprendida es por tanto:

$$G_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = a \cdot \left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \text{ u}^2.$$

Si duplicamos a, se tiene que la función diferencia es ahora:

$$f_2(x) = 2a \cdot h(x)$$

y su primitiva:

$$G_2(x) = 2a \cdot H(x)$$

Por lo que el área comprendida es:

$$G_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2a \cdot \left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \text{ u}^2.$$

30 S **Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\dfrac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor de OX.**

$$V = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{75}\right]_{-5}^{5} = \frac{20\pi}{3} \text{ u}^3.$$

31 **Calcula el área limitada por $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, siendo a y b las abscisas del máximo y el mínimo de f.**

La función corta al eje X en $x = 0$.

Por otro lado, tiene un mínimo en $x = -2$ y un máximo en $x = 2$.

Tenemos que distinguir entre dos intervalos: de -2 a 0 y de 0 a 2.

Hallamos la función primitiva:

$$G(x) = \int \frac{4x}{x^2+4}\,dx = 2ln\,(x^2+4)$$

El área en el primer intervalo es:

$$G(-2) = 2 \cdot ln\,(8)$$

$$G(0) = 2 \cdot ln\,(4)$$

$$G(0) - G(-2) = 2 \cdot \big(ln\,(4) - ln\,(8)\big)$$

$$\big|2 \cdot \big(ln\,(4) - ln\,(8)\big)\big| = 2 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big)\ \text{u}^2$$

El área en el segundo intervalo es:

$$G(2) = 2 \cdot ln\,(8)$$

$$G(2) - G(0) = 2 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big)$$

$$2 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big)\ \text{u}^2$$

El área total es:

$$2 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big) + 2 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big) = 4 \cdot \big(ln\,(8) - ln\,(4)\big)\ \text{u}^2$$

32 **Halla el área comprendida entre las curvas $y = e^x$, $y = 2x - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.**

I. Hallamos la función diferencia:

$$y = e^x - (2x - x^2) = e^x + x^2 - 2x$$

II. Buscamos su primitiva:

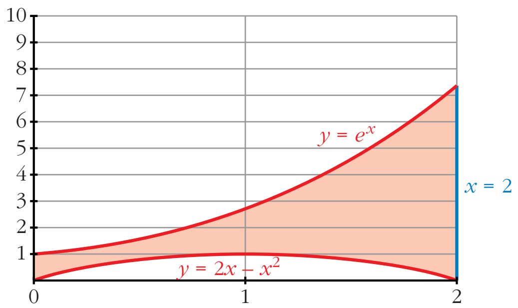
$$G(x) = e^x + \frac{x^3}{3} - x^2$$

III. $G(0) = 1$

$$G(2) = e^2 - \frac{4}{3}$$

$$G(2) - G(0) = e^2 - \frac{4}{3} - 1$$

El área buscada es $\left(e^2 - \dfrac{4}{3} - 1\right)$ u^2.



33 **La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. Calcula el área de S y el volumen de la figura engendrada por S al girar alrededor del eje X.**

Buscamos una primitiva:

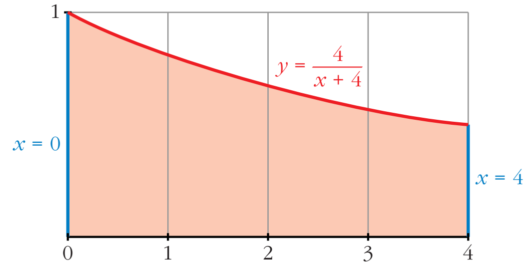
$$G(x) = 4 \cdot ln\ |x + 4|$$

$G(0) = 4 \cdot ln\ (4)$

$G(4) = 4 \cdot ln\ (8)$

$G(4) - G(0) = 4 \cdot \big(ln\ (8) - ln\ (4)\big)$

El área buscada es $4 \cdot \big(ln\ (8) - ln\ (4)\big)$ u^2.



$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{4}{x+4}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-16}{x+4}\right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{8} = 2\pi \text{ u}^3.$$

Página 399

34 **Halla el área de la región del plano limitado por la curva $y = ln\ x$, la recta $y = 2$ y los ejes de coordenadas.**

La curva $y = ln\,x$ e $y = 2$ se cortan en $x = e^2$, por tanto los límites de integración son 1 y e^2. Por otro lado, la región comprendida entre 0 y 1.

Así que distinguimos dos intervalos: de 0 a 1 y de 1 a e^2.

En e primer intervalo, la función diferencia es: $y = 2 - 0 = 2$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = 2x$$

$$G_1(0) = 0, \quad G_1(1) = 2$$

$$G_1(1) - G_1(0) = 2$$

El área para el primer intervalo es 2 u^2.

En el segundo intervalo, la función diferencia es:

$$y = 2 - ln\ x$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = 2x - (x \cdot ln\ |x| - x) = 3x - x ln\ |x|$$

$$G_2(e^2) = 3 \cdot e^2 - e^2 \cdot 2 = e^2$$

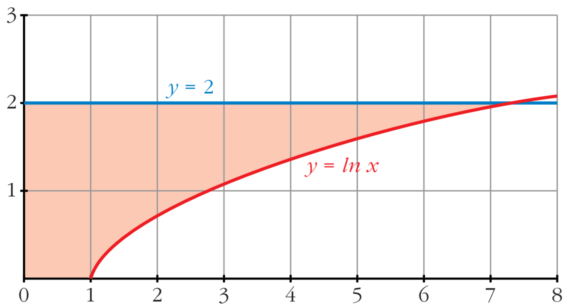
$$G_2(1) = 3$$

$$G_2(e^2) - G_2(1) = e^2 - 3$$

El área para el segundo intervalo es $(e^2 - 3)$ u^2.

Por tanto, el área total es:

$$(2 + e^2 - 3) = (e^2 - 1)\ \text{u}^2.$$



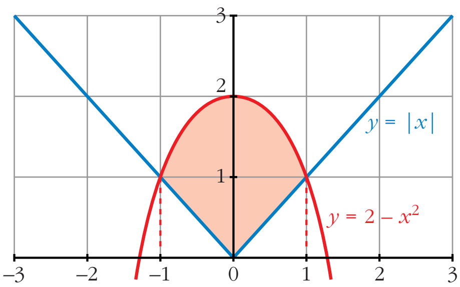
35 **Calcula el área de la figura limitada por las curvas que se dan en los siguientes casos:**

a) $y = 2 - x^2$, $y = |x|$

b) $xy + 8 = 0$, $y = x^2$, $y = 1$

c) $y = sen\ x$, $y = cos\ x$, $x = 0$

a)



Se cortan en $x = -1$ y $x = 1$.

En el intervalo de -1 a 0, la función diferencia es:

$$y = 2 - x^2 - (-x) = 2 - x^2 + x$$

En el intervalo de 0 a 1, la función diferencia es:

$$y = 2 - x^2 - x$$

Por simetría, basta calcular el área en uno de los dos intervalos, por ejemplo, en el segundo. Buscamos su función primitiva:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

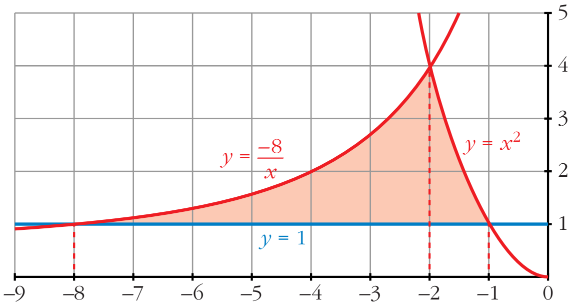
$$G(1) = \frac{7}{6}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) - G(0) = \frac{7}{6}$$

El área total es $2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$ u^2.

b)



Las tres funciones se cortan 2 a 2 en: $-8, -2$ y -1.

Por tanto, calculamos el área en dos intervalos, de -8 a -2 y de -2 a -1.

La función diferencia en el primer intervalo es: $y = \frac{-8}{x} - 1$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = -8 \cdot ln\ |x| - x$$

$$G_1(-8) = -8 \cdot ln\ (-8) + 8$$

$$G_1(-2) = -8 \cdot ln\ (-2) + 2$$

$$G_1(-2) - G_1(-8) = -8 \cdot ln\ (-2) + 2 + 8 \cdot ln\ (-8) - 8 =$$

$$= -8 \cdot \big(ln\ (-2) - ln\ (-8)\big) - 6 = -8 \cdot ln\left(\frac{1}{4}\right) - 6 = 8ln\ 4 - 6$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$y = x^2 - 1$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

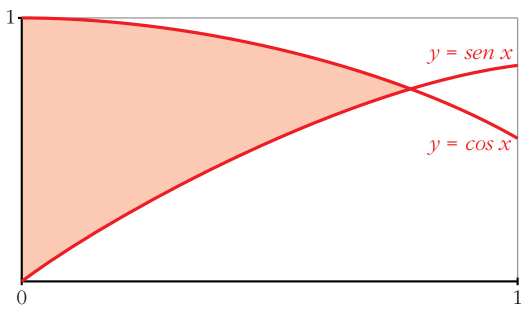
$$G_2(-2) = \frac{-2}{3}$$

$$G_2(-1) = \frac{2}{3}$$

$$G_2(-1) - G_2(-2) = \frac{4}{3}$$

El área buscada es: $\left(8ln\ 4 - 6 + \frac{4}{3}\right) = \left(8ln\ 4 - \frac{14}{3}\right)\ u^2$

c)



Las dos curvas se cortan en $x = \frac{\pi}{4}$.

Por tanto, nuestros límites de integración son 0 y $\frac{\pi}{4}$.

Buscamos la función diferencia:

$$y = \cos x - \operatorname{sen} x$$

Su primitiva es:

$$G(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$G(0) = 1$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0) = \sqrt{2} - 1$$

El área buscada es $(\sqrt{2} - 1)\ u^2$.

36 **Sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\frac{9}{2}$, calcula el valor de b.**

La curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ se cortan en el punto de abscisa $x = b$ y en $x = 0$.

Así, nuestros límites de integración son 0 y b.

La función diferencia es:

$$y = bx - x^2$$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$G(0) = 0$$

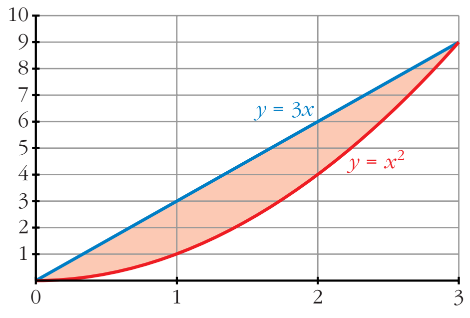
$$G(b) = \frac{b^3}{6}$$

$$G(b) - G(0) = \frac{b^3}{6}$$

Como el área es $\frac{9}{2}$, se tiene que:

$$\frac{b^3}{6} = \frac{9}{2},$$

de donde obtenemos que $b = 3$.



37 **Calcula el valor de a para que el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + ax$ y el eje X sea igual a 36.**

La curva corta al eje X en los puntos de abscisa 0 y a (estos son los límites de integración).

Su primitva es:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

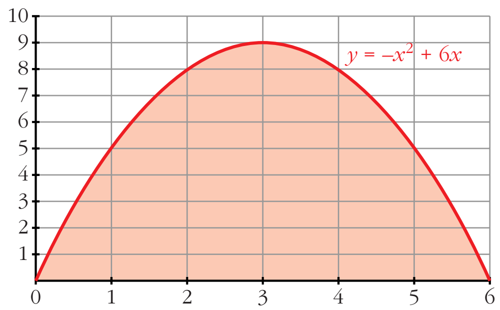
$$G(a) = \frac{a^3}{6}$$

$$G(a) - G(0) = \frac{a^3}{6}$$

Como el área es 36, se tiene que:

$$\frac{a^3}{6} = 36,$$

de donde averiguamos que $a = 6$.



38 **Dada la función $y = \dfrac{2}{x+1}$, calcula el valor de a para que el área limitada por esa curva y las rectas $x = 0$ y $x = a$ sea igual a 2.**

Buscamos su primitiva:

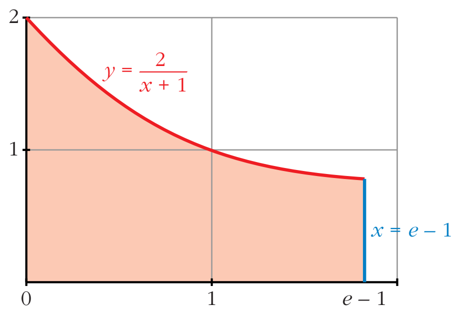
$$G(x) = 2 \cdot ln\ (x + 1)$$

$$G(0) = 0$$

$$G(a) = 2 \cdot ln\ (a + 1)$$

$$G(a) - G(0) = 2 \cdot ln\ (a + 1)$$

Como el área es igual a 2, se tiene que: $2 \cdot ln\ (a + 1) = 2$, de donde averiguamos que $a = e - 1$.



39 **Considera la región del plano que determinan las curvas $y = e^x$ e $y = e^{2x}$ y la recta $x = k$.**

a) Halla su área para $k = 1$.

b) Determina el valor de $k > 0$ para que el área sea 2.

a) Si $k = 1$, nuestros límites de integración son 0 y 1.

Hallamos la función diferencia: $y = e^{2x} - e^x$

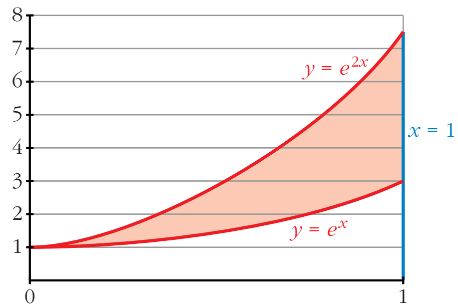
Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{e^{2x}}{2} - e^x$$

$$G(0) = \frac{-1}{2}, \quad G(1) = \frac{e^2}{2} - e$$

$$G(1) - G(0) = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$$

El área buscada es $\left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\right)$ u^2.



b) Ahora nuestros límites de integración son 0 y k. Como la función diferencia y su primitiva son las mismas que en el apartado a), se tiene que:

$$G(0) = \frac{-1}{2}$$

$$G(k) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k$$

$$G(k) - G(0) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2}$$

Como el área es 2, se tiene que: $\frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2} = 2$

Resolviendo la ecuación, averiguamos que $k = ln\,(3)$.

40 **Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^2 - 2x - 3$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 0 y 1.**

Los puntos que determinan la cuerda son $(0, -3)$ y $(1, -4)$, de donde obtenemos la ecuación de la recta que contiene la cuerda:

$$y = -x - 3$$

Nuestros límites de integración son 0 y 1.

Hallamos la función diferencia:

$$y = x^2 - 2x - 3 - (-x - 3) = x^2 - x$$

Su primitiva es:

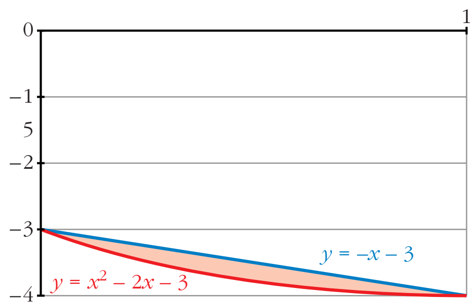
$$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) = \frac{-1}{6}$$

$$G(1) - G(0) = \frac{-1}{6}$$

El área buscada es $\left|\frac{-1}{6}\right| = \frac{1}{6}$ u^2.



41 **Dadas $y = -x^2 + 1$ y la recta $y = a$, $a < 0$, determina el valor de a de modo que el área entre la curva y la recta sea $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ u².**

La curva y la recta se cortan en los puntos de abscisa $x = -\sqrt{1-a}$ y $x = \sqrt{1-a}$.

La función diferencia es: $y = -x^2 + 1 - a$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + x - ax$$

$$G(-\sqrt{1-a}) = \frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} - \sqrt{1-a} + a \cdot \sqrt{1-a}$$

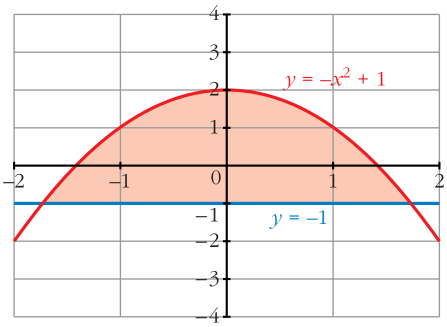
$$G(\sqrt{1-a}) = -\frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} + \sqrt{1-a} - a \cdot \sqrt{1-a}$$

$$G(\sqrt{1-a}) - G(-\sqrt{1-a}) = \frac{4}{3}(1 - a) \cdot \sqrt{1-a}$$

Como el área es $\frac{8\sqrt{2}}{3}$, igualamos:

$$\frac{4}{3}(1 - a) \cdot \sqrt{1-a} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos que $a = -1$.



42 **Halla el área de la porción de plano encerrada entre las curvas $y = sen\ x$ e $y = sen\ 2x$ para valores de x en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.**

Las curvas se cortan en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$.

Por tanto, tenemos dos intervalos de integración de: 0 a $\frac{\pi}{3}$ y de $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{2}$.

La función diferencia en el primer intervalo es: $y = sen\ 2x - sen\ x$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = \frac{-cos\ 2x}{2} + cos\ x$$

$$G_1(0) = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

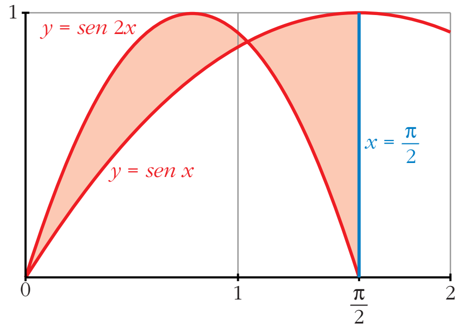
$$G_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$G_1\left(\frac{\pi}{3}\right) - G_1(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

La función diferencia en el segundo intervalo es: $y = sen\, x - sen\, 2x$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = -\cos x + \frac{\cos 2x}{2}$$



$$G_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4}$$

$$G_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$G_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - G_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

El área buscada es $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ u^2.

43 **Halla el área comprendida entre la curva** $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$**, el eje** OX **y las rectas** $x = 1$ **y** $x = 2$**.**

Buscamos una primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{4x}{x^2+2x+1}\right) dx =$$

$$= x - 2 \cdot \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1}\, dx =$$

$$= x - 2 \cdot \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\, dx + 2 \cdot \int \frac{2}{(x+1)^2}\, dx =$$

$$= x - 2 \cdot \ln (x+1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{(x+1)}$$

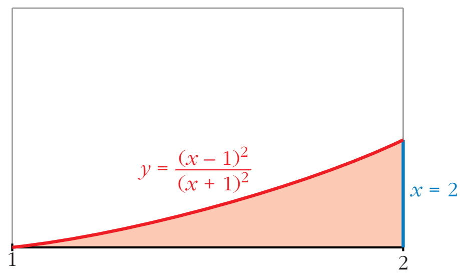
$$G(1) = -2 \cdot \ln (4) - 3$$

$$G(2) = \frac{2}{3} - 2 \cdot \ln (9)$$

$$G(2) - G(1) = \frac{2}{3} - 2\ln (9) + 2\ln (4) + 3 =$$

$$= \frac{11}{3} + 2\left(\ln (4) - \ln (9)\right) = \frac{11}{3} + 2\left(\ln \left(\frac{4}{9}\right)\right) u^2$$

El área buscada es $\left[\frac{11}{3} + 2\ln \left(\frac{4}{9}\right)\right]$ u^2.



44 **Calcula el área limitada por la hipérbola $xy = 1$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 1 y 4.**

La cuerda tiene por extremos los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

Así, obtenemos que la ecuación de la recta que contiene a la cuerda es:

$$y = \frac{-x}{4} + \frac{5}{4}$$

Nuestros límites de integración son 1 y 4.

Calculamos la función diferencia:

$$y = \frac{-x}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{x}$$

Su primitiva es:

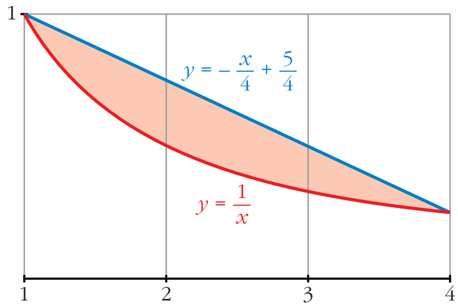
$$G(x) = \frac{-x^2}{8} + \frac{5x}{4} - \ln|x|$$

$$G(1) = \frac{9}{8}$$

$$G(4) = 3 - \ln 4$$

$$G(4) - G(1) = 3 - \ln 4 - \frac{9}{8} = \frac{15}{8} - \ln 4$$

El área buscada es $\left(\frac{15}{8} - \ln 4\right)$ u^2.

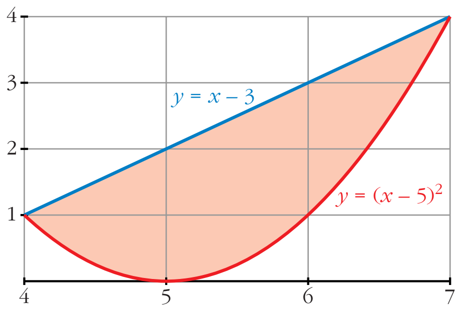


45 **La región limitada por la recta $y = x - 3$, la parábola $y = (x - 5)^2$ y el eje OX gira alrededor del eje OX. Halla el volumen del cuerpo de revolución que se genera.**

Buscamos los puntos de corte de la recta y la parábola:

$$x - 3 = (x - 5)^2$$

Se cortan en los puntos $(4, 1)$ y $(7, 4)$. Por tanto, nuestros límites de integración son 4 y 7.



Hallamos el volumen generado por la recta $y = x - 3$ alrededor de OX entre 4 y 7, y posteriormente le restamos el generado por la curva $y = (x - 5)^2$ alrededor de OX entre los mismos límites.

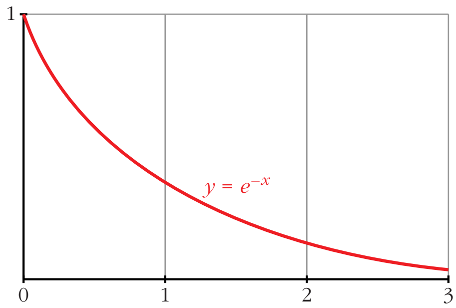
$$V_1 = \pi \cdot \int_4^7 (x - 3)^2 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_4^7 = 21 \cdot \pi \text{ u}^3$$

$$V_2 = \pi \cdot \int_4^7 (x - 5)^4 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{(x-5)^5}{5}\right]_4^7 = \frac{33}{5} \cdot \pi \text{ u}^3$$

El volumen buscado es:

$$V_1 - V_2 = 21 \cdot \pi - \frac{33}{5} \cdot \pi = \frac{72}{5} \cdot \pi \text{ u}^3$$

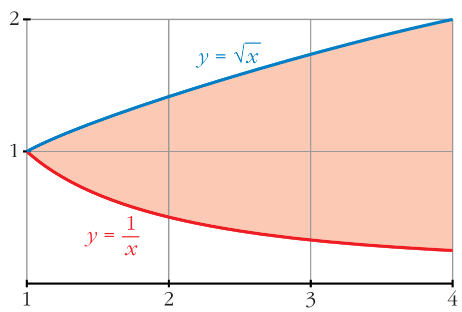
46 **Halla el volumen del cuerpo engendrado por la región del plano limitada por los ejes de coordenadas, la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y la recta $x = 3$, al girar alrededor del eje OX.**



$$V = \pi \cdot \int_0^3 (e^{-x})^2\, dx = \pi \cdot \int_0^3 e^{-2x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{-2} \cdot \left[e^{-2x}\right]_0^3 = \frac{\pi}{-2} \cdot (e^{-6} - 1) \text{ u}^3$$

47 **Calcula el volumen que se obtiene al hacer girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las funciones $y = \dfrac{1}{x}$, $x = y^2$, $x = 4$.**



Las curvas $y = \dfrac{1}{x}$ y $x = y^2$ se cortan en el punto de abscisa 1. Por tanto, nuestros límites de integración son 1 y 4.

El volumen buscado es el resultado de restar el volumen engendrado por la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor de OX entre 1 y 4, y el volumen engendrado por la curva $y = \dfrac{1}{x}$ alrededor de OX entre los mismos límites.

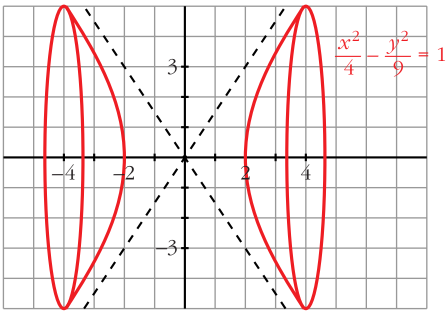
$$V_1 = \pi \cdot \int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15\pi}{2} \text{ u}^3$$

$$V_2 = \pi \cdot \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-1}{x}\right]_1^4 = \frac{3\pi}{4} \text{ u}^3$$

El volumen buscado es:

$$V_1 - V_2 = \frac{15\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{27\pi}{4} \text{ u}^3$$

48 **Calcula el volumen engendrado por la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ cuando $x \in [-4, 4]$.**



$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_2^4 f(x)^2\, dx =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \int_2^4 \left(\frac{9x^2}{4} - 9\right) dx =$$

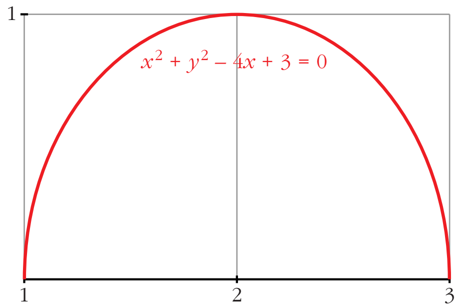
$$= 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{3x^3}{4} - 9x\right]_2^4 =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 24 = 48\pi \text{ u}^3$$

49 **Halla el volumen engendrado por el círculo $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ al girar alrededor de OX.**

El círculo del ejercicio tiene su centro en $(2, 0)$ y radio 1, por tanto corta el aje OX en $(1, 0)$ y $(3, 0)$. Así, nuestros límites de integración son 1 y 3.

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$



$$V = \pi \cdot \int_1^3 y^2\, dx = \pi \cdot \int_1^3 \left(1 - (x-2)^2\right) dx = \pi \cdot \left[x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3 = \frac{4\pi}{3} \text{ u}^3$$

50 **Obtén la familia de curvas en las que la pendiente de la tangente es $f(x) = x\, e^{2x}$. ¿Cuál de esas curvas pasa por el punto $A(0, 2)$?**

Buscamos su primitiva:

$$\int x \cdot e^{2x}\, dx =$$

Utilizando el método de integración por partes obtenemos:

$$y = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k$$

Como pasa por $(0, 2)$, se tiene que: $-\frac{1}{4} + k = 2$, de donde $k = \frac{9}{4}$.

Así, la curva buscada es:

$$y = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{9}{4}$$

51 **Expresa la función de posición de un móvil sabiendo que su aceleración es constante de 8 cm/s², que su velocidad es 0 cuando $t = 3$ y que está en el origen a los 11 segundos.**

Llamamos $S(t)$ a la posición del móvil al cabo de t segundos. Así:

$$V(t) = S'(t) \text{ y } a(t) = S''(t) = 8 \text{ cm/s}^2$$

Calculamos la velocidad $V(t)$:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)dt = \int 8\, dt = 8t + k \\ V(3) = 24 + k = 0 \quad \to \quad k = -24 \end{array}\right\} V(t) = 8t - 24$$

Calculamos $S(t)$:

$$S(t) = \int V(t)\, dt = \int (8t - 24)\, dt = 4t^2 - 24t + c$$

$$S(11) = 220 + c = 0 \quad \to \quad c = -220$$

Por tanto: $S(t) = 4t^2 - 24t - 220$

52 **Un móvil se desplaza en línea recta, con movimiento uniformemente acelerado, con aceleración de 2 m/s² y con velocidad inicial $v_0 = 1$ m/s. Calcula y compara las distancias recorridas entre $t = 0$ y $t = 2$ y entre $t = 2$ y $t = 3$.**

- Calculamos la velocidad del móvil:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)dt = \int 2\, dt = 2t + k \\ V(0) = k = 1 \end{array}\right\} V(t) = 2t + 1$$

- Distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 2$:

$$d_1 = \int_0^2 V(t)dt = \int_0^2 (2t + 1)dt = \left[t^2 + t\right]_0^2 = 6 \text{ m}$$

- Distancia recorrida entre $t = 2$ y $t = 3$:

$$d_2 = \int_2^3 V(t)dt = \left[t^2 + t\right]_2^3 = 12 - 6 = 6 \text{ m}$$

- Por tanto, recorre la misma distancia entre $t = 0$ y $t = 2$ que entre $t = 2$ y $t = 3$.

Página 400

CUESTIONES TEÓRICAS

53 **Calcula la derivada de la función dada por $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t\, dt$ de dos formas:**

a) Obteniendo de forma explícita $F(x)$ y, después, derivando.

b) Aplicando el teorema fundamental del cálculo.

a) $F(x) = \left[sen\ t\right]_0^{x^2} = sen\ x^2$

$F'(x) = 2x \cdot cos\ x^2$

b) Como f es una función continua en todos los puntos, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = f(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cdot cos\ x^2$

54 **Halla la derivada de las funciones que se dan en los siguientes ejercicios:**

a) $F(x) = \int_0^x cos\ t^2\ dt$ **b)** $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 - 1)\ dt$

c) $F(x) = \int_x^4 \frac{1}{1 + sen^2\ t}\ dt$ **d)** $F(x) = \int_0^{sen\ x} (1 + t)\ dt$

a) Como f es continua, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = cos\ x^2$

b) Como f es continua, también podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2)' = 2x \cdot (x^2 - 1)$

c) Aplicamos el teorema:

$$F'(x) = \frac{1}{1 + sen^2\ x}$$

d) Análogamente: $F'(x) = (1 + sen\ x) \cdot (sen\ x)' = (1 + sen\ x) \cdot cos\ x$

55 **Sin resolver la integral, indica dónde hay máximo o mínimo relativo en la función:**

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)\ dt$$

Los máximos o mínimos relativos se obtienen para los valores de x donde la primera derivada es cero, en nuestro caso $F'(x) = 0$.

Como f es continua, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = x^2 - 1$

$F'(x) = 0$ en $x = -1$ y $x = 1$, así en los puntos de abscisa -1 y 1, hay máximos o mínimos relativos.

56 **Sabemos que** $\int_0^x f(t)\ dt = x^2(1 + x)$, **siendo continua en** $\mathbb{R}$. **Calcula** $f(2)$.

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, se tiene que:

$f(x) = 2x \cdot (1 + x) + x^2$

$f(2) = 16$

57 **Sea $F(x) = \int_1^x cos^2\, t\; dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

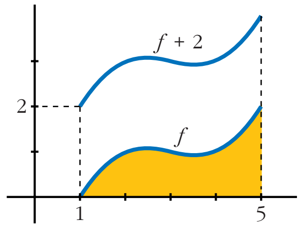
Como $f(x) = cos^2\, x$ es continua en $[0, 2\pi]$, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, y así obtenemos la primera derivada de la función $F(x)$:

$$F'(x) = cos^2\, x$$

Esta tiene sus extremos en los valores de x en que $F'(x) = 0$, esto es en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

58 **Sabemos que el área limitada por una función f, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$ es igual a 6.**

¿Cuánto aumentará el área si trasladamos 2 unidades hacia arriba la función f?

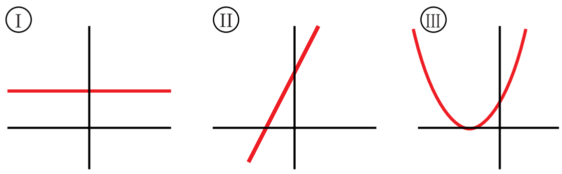


Es fácil ver que el área añadida es la de un rectángulo de base 4 u y 2 u de altura, su área es 8 u^2. Es decir, su área aumentará 8 u^2.

59 **Si una función f es positiva para todos los valores de su variable, cualquier función primitiva de ella es creciente en cada uno de sus puntos. ¿Por qué?**

Cierto, puesto que si la primera derivada de una función es positiva, dicha función es creciente.

60 **La gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable f, a su función derivada f' y a una primitiva F de f. Identifica cada gráfica con su función, justificando la respuesta.**



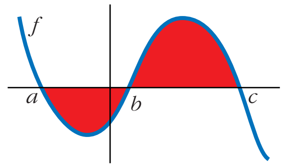
La gráfica II es la de la función, la gráfica I es la de su derivada y la gráfica III la de su primitiva.

La razón es: partiendo de la gráfica II, observamos que se trata de una función lineal (afín) con pendiente positiva, por lo que la función derivada tiene que ser una función constante (la pendiente de la función afín).

Por otro lado, la primitiva de la función afín tiene que ser una función cuadrática, cuya gráfica corresponde a la parábola.

61 **¿Cuál de las siguientes expresiones nos da el área limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas?**

a) $\int_a^c f$; **b)** $\left|\int_a^c f\right|$; **c)** $\int_a^b f + \int_b^c f$; **d)** $-\int_a^b f + \int_b^c f$



d).

62 **Si una función f no corta al eje X, cualquier primitiva de ella no puede tener máximos o mínimos. ¿Por qué?**

Cierto, porque la función f sería la derivada de su primitiva y al no ser nunca cero, no puede tener ni máximos ni mínimos.

63 **Dada la función $y = x^2$, halla el punto $c \in [0, 2]$ tal que el área $\int_0^2 x^2\, dx$ sea igual a la de un rectángulo de base 2 y altura $f(c)$. Es decir, $2f(c) = \int_0^2 x^2\, dx$. ¿Qué teorema asegura la existencia de c?**

$$\int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}$$

Así pues, se tiene: $2 \cdot f(c) = \frac{8}{3}$, de donde averiguamos que $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

El teorema que asegura la existencia de c es el teorema del valor medio del cálculo integral.

64 **Sea F una función definida en $[0, +\infty)$ tal que $F(x) = \int_0^x ln(2 + t)\, dt$. Analiza si es verdadera o falsa cada una de estas afirmaciones:**

a) $F(0) = ln\, 2$ b) $F'(x) = \frac{1}{2 + x}$, $x \geq 0$

c) F es creciente en su dominio.

a) $F(x) = (x + 2) \cdot ln\, |x + 2| - (x + 2) - 2 \cdot ln\, 2 + 2$

$F(0) = 2 \cdot ln\, 2 - 2 - 2 \cdot ln\, 2 + 2 = 0$

Es falsa, además basta ver que no hay área.

b) Como f es continua para $x \geq 0$, aplicamos el teorema del cálculo integral:

$$F'(x) = ln\, |2 + x|$$

También es falsa.

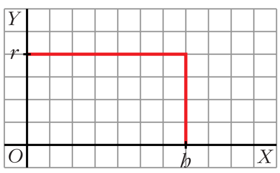
c) Cierta, porque su derivada F' es positiva en todo el dominio.

Página 401

PARA PROFUNDIZAR

65 **Deduce por integración el volumen del cilindro de radio r y altura h.**

☛ ***Haz girar alrededor de OX el rectángulo limitado por la recta $y = r$ entre $x = 0$ y $x =$ h.***



$$V = \pi \cdot \int_0^h r^2\, dx = \pi \cdot [r^2 x]_0^h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

66 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el volumen de la esfera es** $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \pi R^3}$**.**

☛ ***La esfera se engendra al girar el círculo*** $\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2}$ ***alrededor del eje*** $\boldsymbol{X}$***.***

$$V = \pi \cdot \int_{-R}^{R} y^2 \, dx = \pi \cdot \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, dx = \pi \cdot \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \cdot \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$

67 **Demuestra que el volumen del elipsoide obtenido al girar la elipse** $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ **es:**

a) $\boldsymbol{\frac{4}{3} \pi a b^2}$ **si gira alrededor de** $\boldsymbol{OX}$**.**

b) $\boldsymbol{\frac{4}{3} \pi a^2 b}$ **si gira alrededor de** $\boldsymbol{OY}$**.**

a) $V = \pi \cdot \int_{-a}^{a} \left(b^2 - x^2 \frac{b^2}{a^2} \right) dx = \pi \cdot \left[b^2 x - \frac{x^3}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2} \right]_{-a}^{a} =$

$$= \pi \cdot \left(b^2 a - \frac{ab^2}{3} + b^2 a - \frac{ab^2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi \cdot ab^2$$

b) $V = \pi \cdot \int_{-b}^{b} \left(a^2 - y^2 \frac{a^2}{b^2} \right) dy = \pi \cdot \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right]_{-b}^{b} =$

$$= \pi \cdot \left(a^2 b - \frac{ba^2}{3} + a^2 b - \frac{ba^2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi \cdot ba^2$$

68 **Determina la función** $\boldsymbol{y = f(x)}$ **sabiendo que su gráfica pasa por el punto** $\boldsymbol{P(1, 1)}$**, que la tangente en** $\boldsymbol{P}$ **es paralela a la recta** $\boldsymbol{3x + 3y - 1 = 0}$ **y que** $\boldsymbol{f''(x) = x}$**.**

La información que tenemos es:

$f(1) = 1$

$f'(1) = -1$

$f''(x) = x$

Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + a$$

Como $f'(1) = -1$

$$f'(1) = \frac{1}{2} + a = -1, \text{ entonces } a = \frac{-3}{2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$$

Calculamos $f(x)$: $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x + b$

Como $f(1) = 1$, averiguamos que $b = \frac{7}{3}$, así: $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

69 **Determina el valor del parámetro $a > 0$ de tal manera que el área de la región del plano limitada por el eje X y la gráfica de la función $f(x) = a(x + 2)^2 - (x + 2)^3$ valga 108.**

La función corta al eje X en los puntos de abscisa $x = -2$ y $x = a - 2$. Nuestros límites de integración; buscamos una primitiva:

$$G(x) = \int [a(x + 2)^2 - (x + 2)^3]\, dx = a \cdot \frac{(x + 2)^3}{3} - \frac{(x + 2)^4}{4}$$

$$G(a - 2) = \frac{a^4}{12}$$

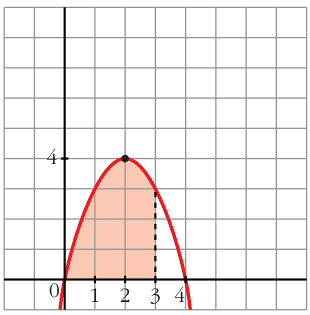
$$G(-2) = 0$$

$$G(a - 2) - G(2) = \frac{a^4}{12}$$

Como el área tiene que ser 108, igualamos:

$$\frac{a^4}{12} = 108. \text{ De donde obtenemos que: } a = 6$$

70 **Halla la ecuación de una parábola de eje vertical, tangente en el origen de coordenadas a una recta de pendiente 4 y que delimita con el eje X un recinto de base [0, 3] y área 9.**



- $y = ax^2 + bx + c$
- Pasa por $(0, 0)$ $\rightarrow$ $y(0) = 0$ $\rightarrow$ $x = 0$
- $y'(0) = 4$ $\rightarrow$ $b = 4$

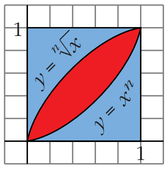
  $y = ax^2 + 4x$
- El área entre 0 y 3 es 9, así:

  $$\int_0^3 (ax^2 + 4x)\, dx = \left[\frac{ax^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9a + 18 = 9$$

  De donde averiguamos que: $a = -1$

  Así, la función es: $y = -x^2 + 4x$

71 **Halla, si es posible, un número entero n, $n \geq 2$, para el cual sean iguales las áreas de los tres recintos: el rojo y cada uno de los dos azules.**



Para calcular el área central, hallamos la función diferencia:

$$y = \sqrt[n]{x} - x^n$$

Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \frac{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$G(0) = 0$

$$G(1) = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

$$G(1) - G(0) = \frac{n-1}{n+1}$$

Por otro lado, el área de la zona que limita con OX la obtenemos con la siguiente función:

$$y = x^n$$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$G(0) = 0$

$$G(1) = \frac{1}{n+1}$$

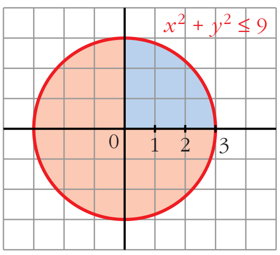
$$G(1) - G(0) = \frac{1}{n+1}$$

La región que falta tiene el mismo área que esta última. Como las áreas tienen que ser iguales, las igualamos:

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

De donde deducimos que $n = 2$.

72 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área del círculo $x^2 + y^2 \leq 9$ es 9π.**



- Área $= 4 \cdot \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$

- Calculamos $G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx$, mediante un cambio de variable:

$$G(x) = \int \sqrt{9 \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2\right)}\, dx = 3 \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}\, dx$$

Cambio: $\dfrac{x}{3} = sen\ t \;\rightarrow\; x = 3 \cdot sen\ t \;\rightarrow\; dx = 2 \cdot cos\ t \cdot dt$

$$G(x) = 3 \cdot \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 3cos\ t \cdot dt = 9 \int cos^2\ t\ dt =$$

$$= 9 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2} \right) dt = 9 \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4}\ sen^2\ t \right] = \frac{9}{2} t + \frac{9}{4}\ sen^2\ t =$$

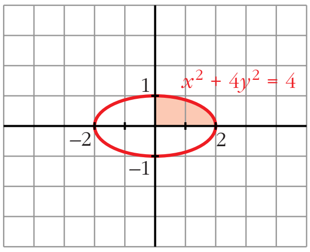
$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{3}{2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{9 - x^2}{9}} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{x \cdot \sqrt{9 - x^2}}{2}$$

• Por tanto, el área será: $A = 4 \cdot \big(G(3) - G(0)\big) = 4 \cdot \dfrac{9\pi}{4} = 9\pi$

73 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ es 2π.**



• Despejamos y: $4y^2 = 4 - x^2 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; y^2 = 1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2 \;\rightarrow\; y = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2}$$

• El área será: $A = 4 \cdot \displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2}\ dx$

• Calculamos $G(x) = \displaystyle\int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2}\ dx$

Cambio: $\dfrac{x}{2} = sen\ t \;\rightarrow\; x = 2 \cdot sen\ t \;\rightarrow\; dx = 2 \cdot cos\ t\ dt$

$$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 2cos\ t\ dt = 2 \int cos^2\ t\ dt =$$

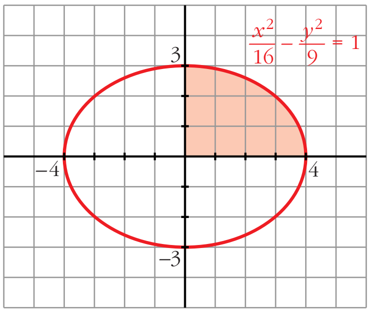
$$= 2 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2} \right) dt = \int (1 + cos\ 2t)\ dt =$$

$$= t + \frac{sen^2\ t}{2} = arc\ sen \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} =$$

$$= arc\ sen \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{x \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4}$$

• El área será: $A = 4 \cdot [G(2) - G(0)] = 4 \cdot \dfrac{\pi}{2} = 2\pi$

74 **Calcula el área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.**



- $\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} \to$

  $y^2 = 9 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \to y = \pm 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}$

- El área es:

$$A = 4 \cdot \int_0^4 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx =$$

$$= 12 \int_0^4 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx$$

- Calculamos $G(x) = \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx$

Cambio: $\frac{x}{4} = sen\ t \to x = 4 \cdot sen\ t \to dx = 4 \cdot cos\ t\ dt$

$$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 4cos\ t\ dt = 4\int cos^2\ t\ dt =$$

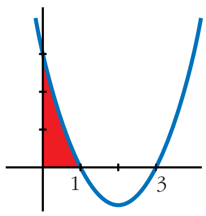
$$= 4 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right) dt = \int (2 + 2cos\ 2t)\ dt =$$

$$= 2t + sen\ 2t = 2 \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{4}\right) + 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} =$$

$$= 2 \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{16 - x^2}}{8}$$

- El área será: $A = 12 \cdot [G(4) - G(0)] = 12\pi$.

75 **Halla la expresión analítica de la función polinómica de segundo grado que corta al eje X en $x = 1$ y $x = 3$, y de la que sabemos que el área sombreada de la figura vale 4/3.**



Como corta al eje X en $x = 1$ y en $x = 3$, ha de ser:

$$f(x) = k \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) = k \cdot (x^2 - 4x + 3)$$

El área sombreada será:

$$A = \int_0^1 k \cdot (x^2 - 4x + 3)\, dx = k \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 =$$

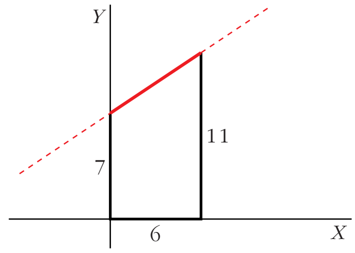
$$= k \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow k = 1$$

Por tanto, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

76 **Halla el volumen de un tronco de cono de radios $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 11$ cm y altura 6 cm. Para ello, haz girar alrededor del eje X el segmento adecuado.**

¿Qué ecuación tiene la recta que sostiene al segmento rojo? ¿Cuáles son los límites de integración que debes tomar?



La recta pasa por los puntos $(0, 7)$ y $(6, 11)$. Obtenemos su ecuación:

$$m = \frac{11-7}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \text{la recta es } y = 7 + \frac{2}{3}x$$

Los límites de integración son $x = 0$ y $x = 6$.

El volumen será:

$$V = \pi \cdot \int_0^6 (f(x))^2\, dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(7 + \frac{2}{3}x\right)^2 dx =$$

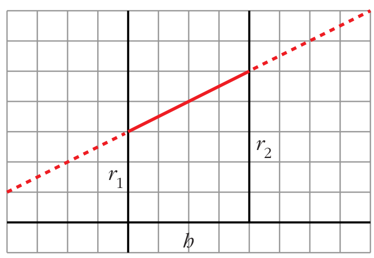
$$= \pi \cdot \int_0^6 \left(49 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left[49x + \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{27}\right]_0^6 = 350\pi \text{ u}^3.$$

77 **Para hallar la fórmula del volumen de un tronco de cono, debes proceder como en el ejercicio anterior, pero con dimensiones variables.**

Hazlo para un tronco de cono tal que los radios de sus bases sean r_1 y r_2 y su altura, h. Debes llegar a la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \text{h}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$



La recta pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, r_2).

Obtenemos la ecuación: $m = \dfrac{r_2 - r_1}{h - 0} = \dfrac{r_2 - r_1}{h} \quad \Rightarrow \quad y = r_1 + \left(\dfrac{r_2 - r_1}{h}\right) \cdot x$

El volumen será:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) x \right]^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^h \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot x^2 + 2r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot x \right] dx =$$

$$= \pi \cdot \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot x^2 \right]_0^h =$$

$$= \pi \cdot \left[r_1^2 h + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot h^2 \right] =$$

$$= \pi \cdot h \cdot \left[r_1^2 + \frac{1}{3} \cdot (r_2^2 + r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2) + r_1 r_2 - r_1^2 \right] =$$

$$= \pi \cdot h \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot r_2^2 + \frac{1}{3} \cdot r_1^2 - \frac{2}{3} \cdot r_1 r_2 + r_1 r_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot [r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$$