



## UNIDAD 8

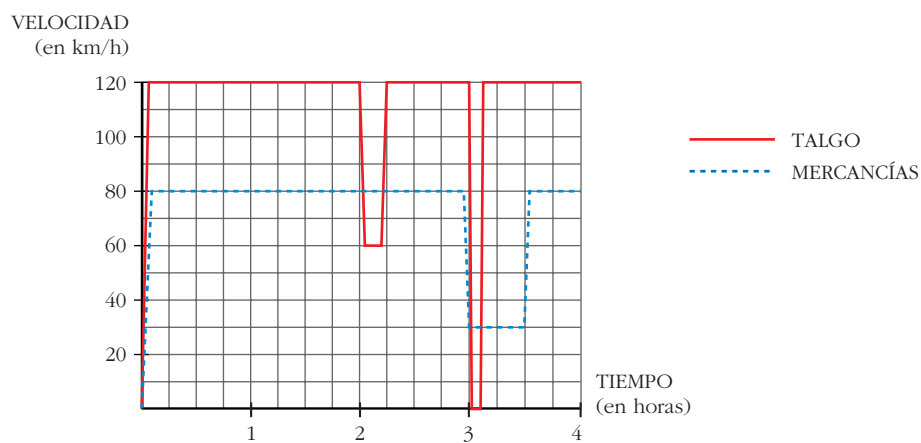
# INICIACIÓN A LAS INTEGRALES

### Página 206

#### 1. Dos trenes

*Un Talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.*

*Éstas son las gráficas TIEMPO - VELOCIDAD de ambos movimientos.*



Como podemos ver en la gráfica, el Talgo, a las dos horas, reduce su velocidad:

¿A qué puede deberse?

¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren?

A las tres horas ambos trenes modifican su marcha: el Talgo para durante breves minutos, mientras que el de mercancías va muy despacio durante media hora.

■ Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:

a) El Talgo, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

b) De 2 a  $2\frac{1}{4}$ , el Talgo disminuye su velocidad. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

- c) El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?
- d) ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?
- e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el Talgo?
- f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o negra. Señala los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

a)  $120 \cdot 2 = 240$  km.

b) A 60 km/h durante  $\frac{1}{4}$  de hora, recorre  $\frac{60}{4} = 15$  km.

c) Ha ido a 80 km/h durante 3 horas, luego ha recorrido  $80 \cdot 3 = 240$  km.

d) Va a 30 km/h durante  $\frac{1}{2}$  hora, luego recorre  $30 \cdot \frac{1}{2} = 15$  km.

e) La parada la hace a las 3 horas; en este momento lleva recorrida una distancia de:

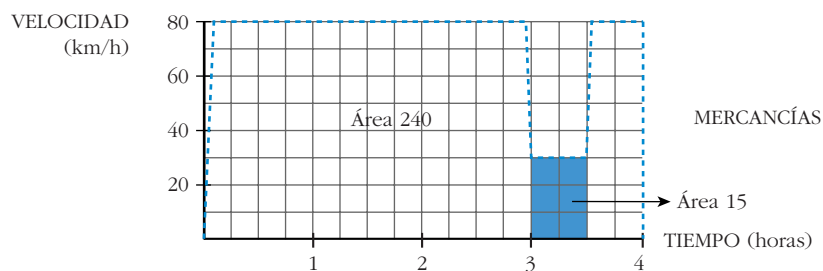
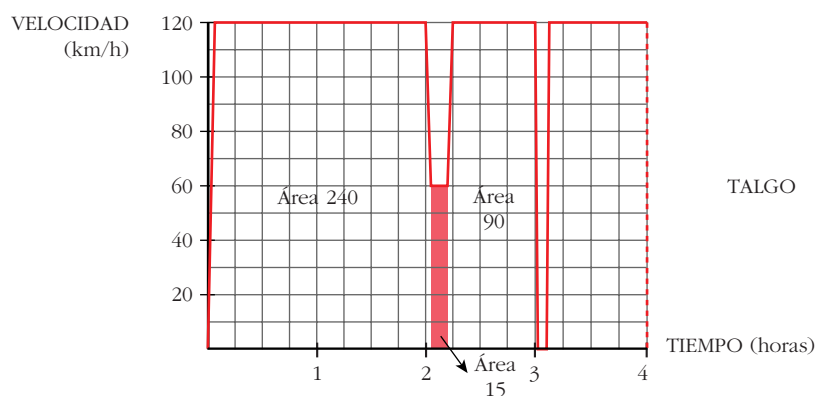
$120 \cdot 2 = 240$  km en las dos primeras horas

$60 \cdot \frac{1}{4} = 15$  km el siguiente cuarto de hora

$120 \cdot \frac{3}{4} = 90$  km los siguientes tres cuartos de hora

Total:  $240 + 15 + 90 = 345$  km hasta llegar a la parada.

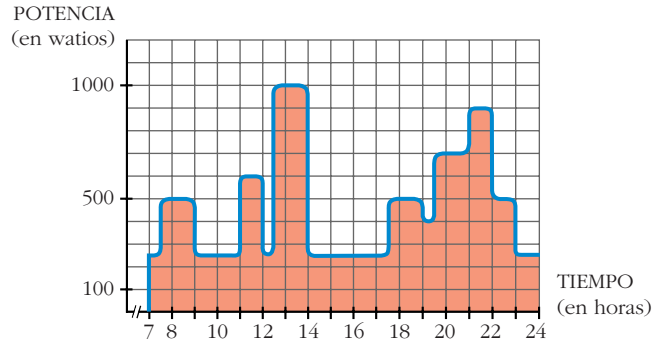
f)



## Página 207

### 2. Consumo de energía eléctrica

La gráfica nos da la potencia eléctrica que hay en funcionamiento en una vivienda, a cada instante, entre las 7 de la mañana y las 12 de la noche.



El área bajo la curva es la energía consumida: potencia  $\times$  tiempo = energía.

Un cuadrado equivale a 0,1 kW  $\cdot$  h

■ ¿Cuántos kW  $\cdot$  h se han consumido, aproximadamente, en esas 17 horas?

Hay 81,25 cuadrados, luego se han consumido:  $0,1 \cdot 81,25 = 8,125$  kW  $\cdot$  h

### 3. ¿Cuál es la función cuya derivada es...?

La función cuya derivada es  $2x$  es ...  $x^2$

La función cuya derivada es  $\cos x$  es ...  $\text{sen } x$

La función cuya derivada es  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  es ...  $\sqrt{x}$

Di cuál es la función cuya derivada es:

- |                      |                      |                                      |                                |                    |
|----------------------|----------------------|--------------------------------------|--------------------------------|--------------------|
| a) $3x^2$            | b) $x^2$             | c) $5x^2$                            | d) $4x^3$                      | e) $x^3$           |
| f) $7x^3$            | g) $3x^2 + 4x^3$     | h) $5x^2 + 7x^3$                     | i) $-\text{sen } x$            | j) $\text{sen } x$ |
| k) $5 \text{sen } x$ | l) $2^x \cdot \ln 2$ | m) $2^x$                             | n) $5 \cdot 2^x$               |                    |
| a) $x^3$             | b) $\frac{x^3}{3}$   | c) $\frac{5x^3}{3}$                  | d) $x^4$                       | e) $\frac{x^4}{4}$ |
| f) $\frac{7x^4}{4}$  | g) $x^3 + x^4$       | h) $\frac{5x^3}{3} + \frac{7x^4}{4}$ | i) $\cos x$                    | j) $-\cos x$       |
| k) $-5 \cos x$       | l) $2^x$             | m) $\frac{2^x}{\ln 2}$               | n) $\frac{5 \cdot 2^x}{\ln 2}$ |                    |

## Página 208

1. Halla una primitiva de: a)  $x^4$     b)  $\sqrt[3]{x}$     c)  $\frac{1}{x^4}$     d)  $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$a) \int x^4 = \frac{x^5}{5} \qquad b) \int \sqrt[3]{x} = \int x^{1/3} = \frac{x^{4/3}}{4/3} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}$$

$$c) \int \frac{1}{x^4} = \int x^{-4} = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3} \qquad d) \int \frac{1}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$$

**2. Busca una primitiva de:**

a)  $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

b)  $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^4}}$

c)  $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x^3}$

a)  $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \int x^{1/3 - 1/2} = \int x^{-1/6} = \frac{x^{5/6}}{5/6} = \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}$

b)  $\int \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^4}} = \int x^{1/6} = \frac{x^{7/6}}{7/6} = \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}$

c)  $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x^3} = \int x^{1/3} \cdot x^{3/2} = \int x^{11/6} = \frac{x^{17/6}}{17/6} = \frac{6\sqrt[6]{x^{17}}}{17}$

**Página 209**

**3. Halla una primitiva de:**

a)  $f(x) = 11x^5$

b)  $f(x) = \sqrt[3]{5x^2}$

c)  $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 3}{x^2}$

a)  $\int 11x^5 = \frac{11x^6}{6} + k$

b)  $\int \sqrt[3]{5x^2} = \int \sqrt[3]{5} \cdot x^{2/3} = \sqrt[3]{5} \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

c)  $\int \frac{x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 3}{x^2} = \int x^2 - 3x + 7 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x - 2 \ln |x| - \frac{3}{x} + k$

**4. Busca una primitiva de:**

a)  $f(x) = 4 \operatorname{sen} x - 5 \operatorname{cos} x$

b)  $f(x) = 3e^{x-1} + 5 \cdot 2^{2x+2}$

c)  $f(x) = \frac{5x-1}{\sqrt{5x}}$

a)  $\int (4 \operatorname{sen} x - 5 \operatorname{cos} x) = -4 \operatorname{cos} x - 5 \operatorname{sen} x + k$

b)  $\int (3e^{x-1} + 5 \cdot 2^{2x+2}) = 3e^{x-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2^{2x+2}}{\ln 2} + k$

c)  $\int \frac{5x-1}{\sqrt{5x}} = \int \left( \frac{5x}{\sqrt{5x}} - \frac{1}{\sqrt{5x}} \right) = \int \left( \sqrt{5x} - \frac{1}{\sqrt{5x}} \right) = \frac{2\sqrt{5x^3}}{3} - \frac{2\sqrt{5x}}{5} + k$

## Página 211

5. Halla las primitivas de estas funciones:

a)  $f(x) = (x^3 - 5x + 3)^2 (3x^2 - 5)$       b)  $f(x) = (5x + 1)^3$

c)  $f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x}$       d)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x}$

e)  $f(x) = \cos x \operatorname{sen}^3 x$

a)  $\int (x^3 - 5x + 3)^2 (3x^2 - 5) = \frac{(x^3 - 5x + 3)^3}{3} + k$

b)  $\int (5x + 1)^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x + 1)^4}{4} + k = \frac{(5x + 1)^4}{20} + k$

c)  $\int \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x} = \ln |x^3 - 3x| + k$

d)  $\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x} = \frac{1}{3} \ln |x^3 - 3x| + k$

e)  $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + k$

6. Busca las primitivas de:

a)  $f(x) = x 2^{x^2} \ln 2$

b)  $f(x) = x 2^{x^2}$

c)  $f(x) = 2^{3x-5}$

d)  $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

e)  $f(x) = \operatorname{sen} (x^3 - 4x^2) (3x^2 - 8x)$       f)  $f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

a)  $\int x 2^{x^2} \ln 2 = \frac{1}{2} \cdot 2^{x^2} + k = \frac{2^{x^2}}{2} + k$

b)  $\int x 2^{x^2} = \frac{1}{2 \ln 2} \cdot 2^{x^2} + k = \frac{2^{x^2}}{2 \ln 2} + k$

c)  $\int 2^{3x-5} = \frac{1}{3 \ln 2} \cdot 2^{3x-5} + k = \frac{2^{3x-5}}{3 \ln 2} + k$

d)  $\int \operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{3} \cos 3x + k$

e)  $\int \operatorname{sen} (x^3 - 4x^2) (3x^2 - 8x) = -\cos(x^3 - 4x^2) + k$

f)  $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \ln |\operatorname{sen} x| + k$

## Página 215

1. Halla e interpreta estas integrales:

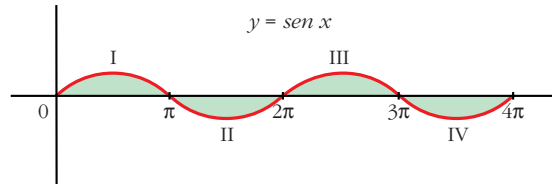
$$\text{a) } \int_0^{4\pi} \text{sen } x \quad \text{b) } \int_{-2}^2 (x^2 - 4)$$

$$\text{a) } G(x) = \int \text{sen } x = -\cos x$$

$$G(4\pi) = -1; \quad G(0) = -1$$

$$\int_0^{4\pi} \text{sen } x = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

Interpretación geométrica:



La parte positiva y la parte negativa son iguales; por eso da de resultado 0:

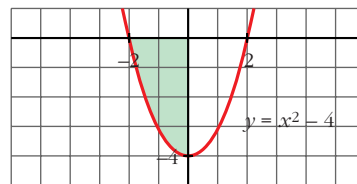
$$\text{Área de I} - \text{Área de II} + \text{Área de III} - \text{Área de IV} = 0$$

$$\text{b) } G(x) = \int (x^2 - 4) = \frac{x^3}{3} - 4x$$

$$G(2) = -\frac{16}{3}; \quad G(-2) = \frac{16}{3}$$

$$\int_{-2}^2 (x^2 - 4) = -\frac{16}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{32}{3}$$

Interpretación geométrica:



Como queda por debajo del eje  $X$ , la integral es el área del recinto señalado con signo negativo, es decir:

$$-\text{Área del recinto} = -\frac{32}{3}$$

2. Halla la siguiente integral e interprétala geoméricamente:  $\int_0^2 e^x$

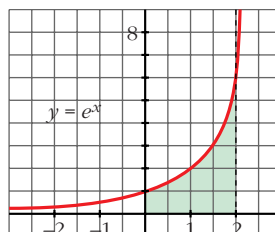
$$G(x) = \int e^x = e^x$$

$$G(2) = e^2; \quad G(0) = 1$$

$$\int_0^2 e^x = e^2 - 1 \approx 6,39$$

Interpretación geométrica:

$$\text{Área del recinto} = e^2 - 1 \approx 6,39$$



## Página 217

**1. Halla el área comprendida entre la función  $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = 0$ ,  $x = 5$ .**

- Puntos de corte con el eje  $X$ :

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2$$

Solo nos sirven  $x = 1$ ,  $x = 2$  (están entre 0 y 5).

- Hay tres recintos: I [0, 1]; II [1, 2]; III [2, 5]

$$G(x) = \int (x^2 - 1)(x^2 - 4) = \int (x^4 - 5x^2 + 4) = \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x$$

$$G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{38}{15}; \quad G(2) = \frac{16}{15}; \quad G(5) = \frac{1310}{3}$$

$$\text{Área del recinto I} = |G(1) - G(0)| = \frac{38}{15}$$

$$\text{Área del recinto II} = |G(2) - G(1)| = \left| -\frac{22}{15} \right| = \frac{22}{15}$$

$$\text{Área del recinto III} = |G(5) - G(2)| = \frac{2178}{5}$$

$$\text{Área total} = \frac{38}{15} + \frac{22}{15} + \frac{2178}{5} = \frac{2198}{5} = 439,6 \text{ u}^2$$

**2. Halla el área comprendida entre la función  $y = x^3 - x^2 - 2x$  y el eje  $X$ .**

- Puntos de corte con el eje  $X$ :

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2$$

- Hay dos recintos: I [-1, 0]; II [0, 2]

$$G(x) = \int (x^3 - x^2 - 2x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$$

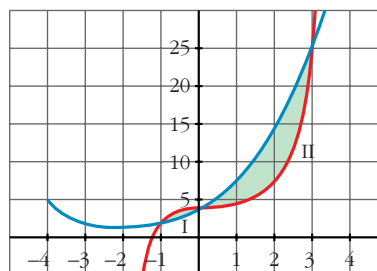
- $G(-1) = -\frac{5}{12}$ ;  $G(0) = 0$ ;  $G(2) = -\frac{8}{3}$
- Área del recinto I =  $|G(0) - G(-1)| = \frac{5}{12}$
- Área del recinto II =  $|G(2) - G(0)| = \frac{8}{3}$
- Área total =  $\frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \approx 3,08 \text{ u}^2$

## Página 218

1. Halla el área encerrada entre las gráficas de las funciones siguientes:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 4, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$$

- $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + 4 - x^2 - 3x - 4 = x^3 - 2x^2 - 3x$
- $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 3$
- Hay dos recintos: I  $[-1, 0]$ ; II  $[0, 3]$
- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2 - 3x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$
- $G(-1) = -\frac{7}{12}$ ;  $G(0) = 0$ ;  $G(3) = -\frac{45}{4}$
- Recinto I: Área  $[-1, 0] = |G(0) - G(-1)| = \frac{7}{12}$
- Recinto II: Área  $[0, 3] = |G(3) - G(0)| = \frac{45}{4}$
- Área total:  $\frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \approx 11,83 \text{ u}^2$



## Página 225

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

#### PARA PRACTICAR

1 Halla una primitiva de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = x + 1$

b)  $f(x) = 2x - \sqrt{3}$

c)  $f(x) = \frac{x}{2} + x^2$

d)  $f(x) = -8x^3 + 3x^2$

e)  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

f)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{5x^4}$

g)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}$

h)  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$



$$\text{a) } \int (x + 1) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\text{b) } \int (2x - \sqrt{3}) = x^2 - \sqrt{3} x$$

$$\text{c) } \int \left( \frac{x}{2} + x^2 \right) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3}$$

$$\text{d) } \int (-8x^3 + 3x^2) = -2x^4 + x^3$$

$$\text{e) } \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = \int (x^{-2} + x^{-3}) = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

$$\text{f) } \int \left( \sqrt{x} + \frac{3}{5x^4} \right) = \int \left( x^{1/2} + \frac{3}{5} x^{-4} \right) = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{1}{5x^3}$$

$$\text{g) } \int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3} \right) = \int \left( x^{-1/2} + \frac{1}{3} x \right) = \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} = 2\sqrt{x} + \frac{x^2}{6}$$

$$\text{h) } \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \int x^2 \cdot x^{-1/3} = \int x^{5/3} = \frac{x^{8/3}}{8/3} = \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}$$

## 2 Calcula:

$$\text{a) } \int \sqrt{3x} \quad \text{b) } \int \sqrt[3]{5x^2} \quad \text{c) } \int \frac{x + x^2}{\sqrt{x}} \quad \text{d) } \int \frac{x^3 - 2}{x^2}$$

$$\text{e) } \int \frac{3}{x} \quad \text{f) } \int \frac{2}{x+1} \quad \text{g) } \int \frac{x-2}{x^2} \quad \text{h) } \int \frac{3-2x}{x}$$

$$\text{a) } \int \sqrt{3x} = \int \sqrt{3} x^{1/2} = \sqrt{3} \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{3} \sqrt{x^3}}{3} + k = \frac{2\sqrt{3}x^3}{3} + k$$

$$\text{b) } \int \sqrt[3]{5x^2} = \int \sqrt[3]{5} x^{2/3} = \sqrt[3]{5} \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5}x^5}{5} + k$$

$$\text{c) } \int \frac{x + x^2}{\sqrt{x}} = \int (x^{1/2} + x^{3/2}) = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{5/2}}{5/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + k$$

$$\text{d) } \int \frac{x^3 - 2}{x^2} = \int (x - 2x^{-2}) = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^{-1}}{-1} + k = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} + k$$

$$\text{e) } \int \frac{2}{x} = 2 \ln |x| + k$$

$$f) \int \frac{2}{x+1} = 2 \ln |x+1| + k$$

$$g) \int \frac{x-2}{x^2} = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = \ln |x| + \frac{2}{x} + k$$

$$h) \int \frac{3-2x}{x} = \int \left( \frac{3}{x} - 2 \right) = 3 \ln |x| - 2x + k$$

### 3 Resuelve:

$$a) \int \operatorname{sen} 3x$$

$$b) \int \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$c) \int \frac{1}{\cos^2 5x}$$

$$d) \int (1 + \operatorname{tg}^2 3x)$$

$$e) \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$f) \int \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)$$

$$g) \int \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$h) \int \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$a) \int \operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{3} \int 3 \operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{3} \cos 3x + k$$

$$b) \int \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) + k$$

$$c) \int \frac{1}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5} \int 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + k$$

$$d) \int (1 + \operatorname{tg}^2 3x) = \frac{1}{3} \int 3(1 + \operatorname{tg}^2 3x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + k$$

$$e) \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \ln |\operatorname{sen} x| + k$$

$$f) \int \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) = x + 2 \cos \frac{x}{2} + k$$

$$g) \int \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + k$$

$$h) \int \cos \frac{\pi}{2} x = \frac{2}{\pi} \int \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x + k$$

**4 Calcula:**

$$\text{a) } \int e^{x+3} \quad \text{b) } \int e^{2x-1} \quad \text{c) } \int 2^{x-7} \quad \text{d) } \int 3^{x/2}$$

$$\text{a) } \int e^{x+3} = e^{x+3} + k$$

$$\text{b) } \int e^{2x-1} = \frac{1}{2} \int 2 e^{2x-1} = \frac{1}{2} e^{2x-1} + k$$

$$\text{c) } \int 2^{x-7} = \frac{1}{\ln 2} \int \ln 2 \cdot 2^{x-7} = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{x-7} + k = \frac{2^{x-7}}{\ln 2} + k$$

$$\text{d) } \int 3^{x/2} = 2 \int \frac{1}{2} 3^{x/2} = \frac{2 \cdot 3^{x/2}}{\ln 3} + k$$

**5 Calcula:**

$$\text{a) } \int (x-3)^3 \quad \text{b) } \int (2x+1)^5 \quad \text{c) } \int \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{d) } \int \sqrt{3x-5} \quad \text{e) } \int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} \quad \text{f) } \int \frac{3}{2x-1}$$

$$\text{g) } \int \frac{2x}{x^2+2} \quad \text{h) } \int \frac{x}{3x^2-4}$$

$$\text{a) } \int (x-3)^3 = \frac{(x-3)^4}{4} + k$$

$$\text{b) } \int (2x+1)^5 = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^6}{6} + k = \frac{(2x+1)^6}{12} + k$$

$$\text{c) } \int \frac{1}{\sqrt{x+2}} = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} + k$$

$$\text{d) } \int \sqrt{3x-5} = \frac{1}{3} \int 3(3x-5)^{1/2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-5)^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{(3x-5)^3}}{9} + k$$

$$\text{e) } \int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} = 2 \int \frac{1}{2} \left(\frac{x+3}{2}\right)^{1/3} = 2 \cdot \frac{[(x+3)/2]^{4/3}}{4/3} + k = \frac{3}{2} \left(\frac{x+3}{2}\right)^{4/3} + k$$

$$\text{f) } \int \frac{3}{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot 3 \int \frac{2}{2x-1} = \frac{3}{2} \ln |2x-1| + k$$

$$\text{g) } \int \frac{2x}{x^2+2} = \ln |x^2+2| + k$$

$$\text{h) } \int \frac{x}{3x^2-4} = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{3x^2-4} = \frac{1}{6} \ln |3x^2-4| + k$$

**6** Calcula:

a)  $\int x \sqrt{5x^2 + 1}$

b)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 3}}$

c)  $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3}$

d)  $\int x e^{x^2}$

e)  $\int \frac{5x}{3x^2 + 2}$

f)  $\int \text{sen}^2 x \cos x$

g)  $\int \frac{x^3}{x^4 - 4}$

h)  $\int x \text{sen } x^2$

a)  $\int x \sqrt{5x^2 + 1} = \frac{1}{10} \int 10x(5x^2 + 1)^{1/2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{(5x^2 + 1)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{\sqrt{(5x^2 + 1)^3}}{15} + k$

b)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 3}} = \frac{2}{3} \int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 3}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 - 3} + k$

c)  $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3} = \ln |x^2 + x - 3| + k$

d)  $\int x e^{x^2} = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} = \frac{1}{2} e^{x^2} + k$

e)  $\int \frac{5x}{3x^2 + 2} = \frac{5}{6} \int \frac{6x}{3x^2 + 2} = \frac{5}{6} \ln |3x^2 + 2| + k$

f)  $\int \text{sen}^2 x \cos x = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + k$

g)  $\int \frac{x^3}{x^4 - 4} = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4 - 4} = \frac{1}{4} \ln |x^4 - 4| + k$

h)  $\int x \text{sen } x^2 = -\frac{1}{2} \int -2x \text{sen } x^2 = -\frac{1}{2} \cos x^2 + k$

**7** Calcula:

a)  $\int 3e^{5x}$

b)  $\int x^2 \cdot 2^{-x^3 + 5}$

c)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

d)  $\int \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 2}}$

e)  $\int \frac{\sqrt{x + 5}}{x + 5}$

f)  $\int \frac{3x - 2}{\sqrt{3x - 2}}$

a)  $\int 3 e^{5x} = \frac{3}{5} \int 5 e^{5x} = \frac{3}{5} e^{5x} + k$

b)  $\int x^2 \cdot 2^{-x^3 + 5} = -\frac{1}{3} \int -3x^2 \cdot 2^{-x^3 + 5} = \frac{-2^{-x^3 + 5}}{3 \ln 2} + k$

$$c) \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = 2 e^{\sqrt{x}} + k$$

$$d) \int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+2}} = \sqrt{x^2-6x+2} + k$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5} = \int \frac{1}{\sqrt{x+5}} = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = 2\sqrt{x+5} + k$$

$$f) \int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}} = \int \sqrt{3x-2} = \frac{1}{3} \int 3(3x-2)^{1/2} = \frac{1}{3} \frac{(3x-2)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{(3x-2)^3}}{9} + k$$

**8 Resuelve las siguientes integrales:**

$$a) \int \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} \qquad b) \int \frac{x^2 + 5x - 7}{x + 3}$$

$$c) \int \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1} \qquad d) \int \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$$

• *Divide y transforma la fracción así:  $\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$*

$$a) \int \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} = \int \left( x - 2 + \frac{2}{x - 1} \right) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \ln |x - 1| + k$$

$$b) \int \frac{x^2 + 5x - 7}{x + 3} = \int \left( x + 2 - \frac{13}{x + 3} \right) = \frac{x^2}{2} + 2x - 13 \ln |x + 3| + k$$

$$c) \int \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1} = \int (x - 1) = \frac{x^2}{2} - x + k$$

$$d) \int \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} = \int \left( 1 + \frac{3x}{x^2 - 1} \right) = x + \frac{3}{2} \ln |x^2 - 1| + k$$

**9 Calcula:**

$$a) \int \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad b) \int \operatorname{sen} x \cos x \qquad c) \int \sqrt{x} \sqrt{x}$$

$$d) \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} \qquad e) \int (2x^2 + 1)^2 \qquad f) \int \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}}$$

$$g) \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2} \qquad h) \int \frac{e^x}{1 + e^x} \qquad i) \int \frac{2}{x} \ln x$$

$$j) \int \frac{1}{e^x} \cos e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
\text{a)} \int \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} &= \cos \frac{1}{x} + k \\
\text{b)} \int \operatorname{sen} x \cos x &= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + k \\
\text{c)} \int \sqrt{x} \sqrt{x} &= \int x^{3/4} = \frac{x^{7/4}}{7/4} + k = \frac{4 \sqrt[4]{x^7}}{7} + k \\
\text{d)} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} &= \int \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x+1} + k \\
\text{e)} \int (2x^2 + 1)^2 &= \int (4x^4 + 4x^2 + 1) = \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + x + k \\
\text{f)} \int \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}} &= \frac{1}{3} \int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{3} + k \\
\text{g)} \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2} &= \int \left( 3x + 8 + \frac{15}{x - 2} \right) = \frac{3x^2}{2} + 8x + 15 \ln |x - 2| + k \\
\text{h)} \int \frac{e^x}{1 + e^x} &= \ln |1 + e^x| + k \\
\text{i)} \int \frac{2}{x} \ln x &= \ln^2 x + k \\
\text{j)} \int \frac{1}{e^x} \cos e^{-x} &= -\operatorname{sen} e^{-x} + k
\end{aligned}$$

## Página 226

**10** Resuelve las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \int_2^5 (-3x^2) & \text{b)} \int_4^6 (2x - 1) & \text{c)} \int_{-2}^2 (x^3 + x) \\
\text{d)} \int_1^4 \sqrt{3x} & \text{e)} \int_1^e \frac{1}{x} & \text{f)} \int_{-1}^3 e^{x-2} \\
\text{g)} \int_0^\pi (\operatorname{sen} x - \cos x) & \text{h)} \int_{-\pi}^\pi \operatorname{sen} 2x &
\end{array}$$

$$\text{a)} G(x) = \int (-3x^2) = -x^3$$

$$G(5) = -125; \quad G(2) = -8$$

$$\int_2^5 (-3x^2) = G(5) - G(2) = -125 - (-8) = -117$$

$$\text{b) } G(x) = \int (2x - 1) = x^2 - x$$

$$G(6) = 30; \quad G(4) = 12$$

$$\int_4^6 (2x - 1) = G(6) - G(4) = 30 - 12 = 18$$

$$\text{c) } G(x) = \int (x^3 + x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$$

$$G(2) = G(-2) = 6$$

$$\int_{-2}^2 (x^3 + x) = G(2) - G(-2) = 0$$

$$\text{d) } G(x) = \int \sqrt{3x} = \int \sqrt{3} x^{1/2} = \frac{\sqrt{3} x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{3}x^3}{3}$$

$$G(4) = \frac{16\sqrt{3}}{3}; \quad G(1) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\int_1^4 \sqrt{3x} = G(4) - G(1) = \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{e) } G(x) = \int \frac{1}{x} = \ln |x|$$

$$G(e) = 1; \quad G(1) = 0$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} = G(e) - G(1) = 1$$

$$\text{f) } G(x) = \int e^{x-2} = e^{x-2}$$

$$G(3) = e; \quad G(-1) = e^{-3}$$

$$\int_{-1}^3 e^{x-2} = G(3) - G(-1) = e - e^{-3} = e - \frac{1}{e^3} = \frac{e^4 - 1}{e^3}$$

$$\text{g) } G(x) = \int (\text{sen } x - \cos x) = -\cos x - \text{sen } x$$

$$G(\pi) = 1; \quad G(0) = -1$$

$$\int_0^\pi (\text{sen } x - \cos x) = G(\pi) - G(0) = 1 - (-1) = 2$$

$$\text{h) } G(x) = \int \text{sen } 2x = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$G(\pi) = -\frac{1}{2}; \quad G(-\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } 2x = G(\pi) - G(-\pi) = 0$$

**11** Halla, en cada caso, el área limitada por:

**S**

a)  $f(x) = x^2 - 4$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = 0$  y  $x = 2$ .

b)  $f(x) = 2x - x^2$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = -1$  y  $x = 1$ .

c)  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  y el eje  $X$ .

d)  $f(x) = 1 - x^2$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = -2$  y  $x = 2$ .

e)  $f(x) = e^x$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = -1$  y  $x = 3$ .

f)  $f(x) = x^2 + 1$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = -1$  y  $x = 3$ .

a) • Puntos de corte con el eje  $X$ :  $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

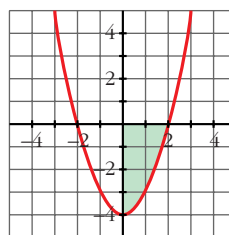
Solo nos sirve  $x_2 = 2$ .

• Hay un recinto:  $[0, 2]$

$$\bullet G(x) = \int (x^2 - 4) = \frac{x^3}{3} - 4x$$

$$\bullet G(2) = -\frac{16}{3}; \quad G(0) = 0$$

$$\bullet \text{Área} = |G(2) - G(0)| = \frac{16}{3} \text{ u}^2$$



b) • Puntos de corte con el eje  $X$ :  $2x^2 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

• Hay dos recintos: I  $[-1, 0]$ ; II  $[0, 1]$

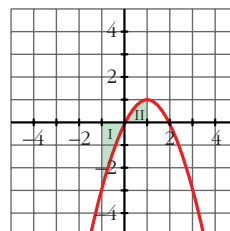
$$\bullet G(x) = \int (2x - x^2) = x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$\bullet G(-1) = \frac{4}{3}; \quad G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \text{Área del recinto I} = |G(0) - G(-1)| = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área del recinto II} = |G(1) - G(0)| = \frac{2}{3}$$

$$\text{Área total} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ u}^2$$





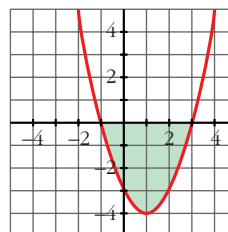
c) • Puntos de corte con el eje  $X$ :  $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$

• Hay un recinto:  $[-1, 3]$

$$\bullet G(x) = \int (x^2 - 2x - 3) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$$\bullet G(-1) = \frac{5}{3}; G(3) = -9$$

$$\bullet \text{Área} = |G(3) - G(-1)| = \left| -9 - \frac{5}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u}^2$$



d) • Puntos de corte con el eje  $X$ :

$$1 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$$

• Hay tres recintos: I  $[-2, -1]$ ; II  $[-1, 1]$ ; III  $[1, 2]$

$$\bullet G(x) = \int (1 - x^2) = x - \frac{x^3}{3}$$

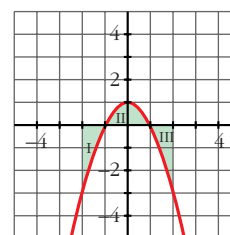
$$\bullet G(-2) = \frac{2}{3}; G(-1) = -\frac{2}{3}; G(1) = \frac{2}{3}; G(2) = -\frac{2}{3}$$

$$\bullet \text{Área del recinto I} = |G(-1) - G(-2)| = \left| -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área del recinto II} = |G(1) - G(-1)| = \left| \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \right| = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área del recinto III} = |G(2) - G(1)| = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área total} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \text{ u}^2$$

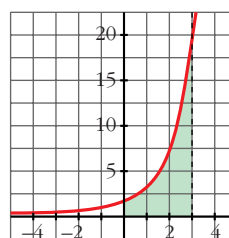


e) • No corta al eje  $X$ .

$$\bullet G(x) = \int e^x = e^x$$

$$\bullet G(-1) = e^{-1}; G(3) = e^3$$

$$\bullet \text{Área} = |G(3) - G(-1)| = e^3 - e^{-1} = e^3 - \frac{1}{e} = \frac{e^4 - 1}{e} \approx 19,7 \text{ u}^2$$

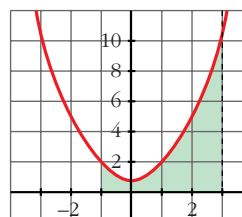


f) • No corta al eje  $X$ .

$$\bullet G(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x$$

$$\bullet G(-1) = -\frac{4}{3}; G(3) = 12$$

$$\bullet \text{Área} = |G(3) - G(-1)| = \frac{40}{3} \text{ u}^2$$



**12** Halla las integrales de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a)  $f(x) = 3x^2 - 6x$  en  $[0, 2]$

b)  $f(x) = 2 \cos x$  en  $[0, \pi/2]$

c)  $f(x) = (x + 1)(x^2 - 2)$  en  $[-1, 2]$

d)  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{4}$  en  $[0, \pi]$

a) •  $G(x) = \int (3x^2 - 6x) = x^3 - 3x^2$

•  $G(0) = 0; G(2) = -4$

•  $\int_0^2 (3x^2 - 6x) = G(2) - G(0) = -4$

b) •  $G(x) = \int 2 \cos x = 2 \operatorname{sen} x$

•  $G(0) = 0; G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

•  $\int_0^{\pi/2} 2 \cos x = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) = 2$

c) •  $G(x) = \int (x + 1)(x^2 - 2) = \int (x^3 + x^2 - 2x - 2) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

•  $G(-1) = \frac{11}{12}; G(2) = -\frac{4}{3}$

•  $\int_{-1}^2 (x + 1)(x^2 - 2) = G(2) - G(-1) = -\frac{4}{3} - \frac{11}{12} = -\frac{9}{4}$

d) •  $G(x) = \int \operatorname{sen} \frac{x}{4} = -4 \cos \frac{x}{4}$

•  $G(0) = -4; G(\pi) = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

•  $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} \frac{x}{4} = G(\pi) - G(0) = -2\sqrt{2} + 4$

### PARA RESOLVER

**13** Calcula el área comprendida entre las curvas:

S

a)  $y = x^2; y = x$

b)  $y = x^2; y = 1$

c)  $y = x^2; y = x^3$

d)  $y = x^2; y = -x^2 + 2x$

e)  $y = 2x^2 + 5x - 3; y = 3x + 1$

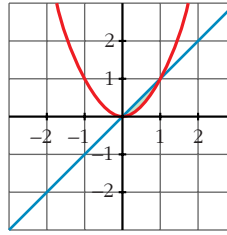
f)  $y = 4 - x^2; y = 8 - 2x^2; x = -2; x = 2$

a) •  $x^2 - x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

•  $G(x) = \int (x^2 - x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

•  $G(0) = 0; G(1) = -\frac{1}{6}$

• Área =  $|G(1) - G(0)| = \frac{1}{6} u^2$

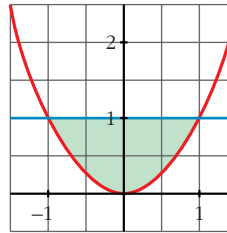


b) •  $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

•  $G(x) = \int (x^2 - 1) = \frac{x^3}{3} - x$

•  $G(-1) = \frac{2}{3}; G(1) = -\frac{2}{3}$

• Área =  $|G(1) - G(-1)| = \frac{4}{3} u^2$

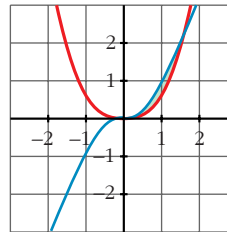


c) •  $x^2 - x^3 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

•  $G(x) = \int (x^2 - x^3) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

•  $G(0) = 0; G(1) = \frac{1}{12}$

• Área =  $|G(1) - G(0)| = \frac{1}{12} u^2$

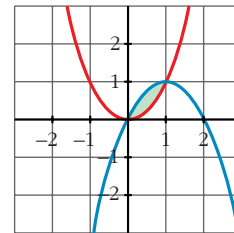


d) •  $x^2 - (-x^2 + 2x) = 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

•  $G(x) = \int (2x^2 - 2x) = \frac{2x^3}{3} - x^2$

•  $G(0) = 0; G(1) = -\frac{1}{3}$

• Área =  $|G(1) - G(0)| = \frac{1}{3} u^2$

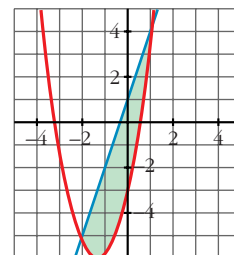


e) •  $2x^2 + 5x - 3 - (3x + 1) = 2x^2 + 2x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$

•  $G(x) = \int (2x^2 + 2x - 4) = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x$

•  $G(-2) = \frac{20}{3}; G(1) = -\frac{7}{3}$

• Área =  $|G(1) - G(-2)| = \left| -\frac{7}{3} - \frac{20}{3} \right| = \frac{27}{3} = 9 u^2$

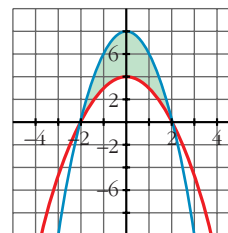


f) •  $4 - x^2 - (8 - 2x^2) = x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

•  $G(x) = \int (x^2 - 4) = \frac{x^3}{3} - 4x$

•  $G(-2) = \frac{16}{3}; G(2) = -\frac{16}{3}$

• Área =  $|G(2) - G(-2)| = \frac{32}{3} u^2$



**14** **S** **Calcula el área de los recintos limitados por:**

a) La función  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  y los ejes de coordenadas.

b) La curva  $y = x^3$ , la recta  $x = 2$  y el eje X.

c) La función  $y = \text{sen } x$ , el eje de abscisas y las rectas  $x = \frac{\pi}{4}$  y  $x = -\frac{\pi}{4}$ .

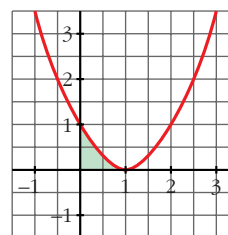
d) La función  $y = \text{cos } x$  y el eje OX entre  $x = 0$  y  $x = \pi$ .

a) •  $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

•  $G(x) = \int (x - 1)^2 = \frac{(x - 1)^3}{3}$

•  $G(0) = -\frac{1}{3}; G(1) = 0$

• Área =  $|G(1) - G(0)| = \frac{1}{3} u^2$

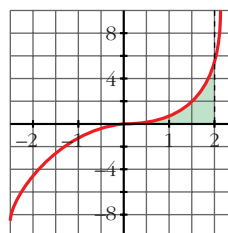


b) •  $x^3 = 0 \rightarrow x = 0$

•  $G(x) = \int x^3 = \frac{x^4}{4}$

•  $G(0) = 0; G(2) = 4$

• Área =  $|G(2) - G(0)| = 4 u^2$



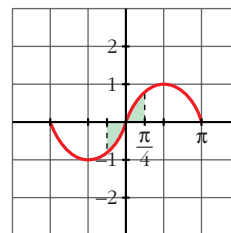
c) •  $\text{sen } x = 0 \rightarrow x = 0$  (entre  $-\frac{\pi}{4}$  y  $\frac{\pi}{4}$ )

• Hay dos recintos: I  $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ ; II  $[0, \frac{\pi}{4}]$

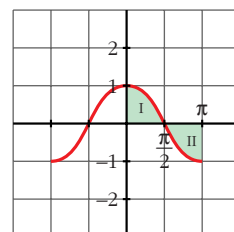
•  $G(x) = \int \text{sen } x = -\text{cos } x$

•  $G(\frac{\pi}{4}) = G(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; G(0) = -1$

- Área recinto I =  $\left| G(0) - G\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 0,29$
- Área recinto II =  $\left| G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0) \right| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,29$
- Área total =  $2 \cdot 0,29 \approx 0,58 \text{ u}^2$



- d) •  $\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$  (entre 0 y  $\pi$ )
- Hay dos recintos: I  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ; II  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
  - $G(x) = \int \cos x = \text{sen } x$
  - $G(0) = 0$ ;  $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ;  $G(\pi) = 0$
  - Área recinto I =  $\left| G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) \right| = 1$
  - Área recinto II =  $|G(\pi) - G(\frac{\pi}{2})| = 1$
  - Área total =  $1 + 1 = 2 \text{ u}^2$

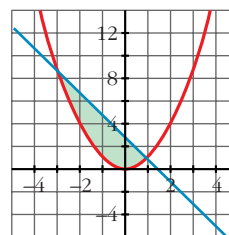


### 15 S Calcula el área comprendida entre las curvas:

- a)  $y = x^2$  e  $y = 3 - 2x$       b)  $y = 4 - x^2$  e  $y = 3x^2$   
 c)  $y = x$  e  $y = x^2 - 2$       d)  $y = 4 - x^2$  e  $y = x^2 - 4$   
 e)  $y = (x + 2)^2(x - 3)$  y el eje de abscisas.

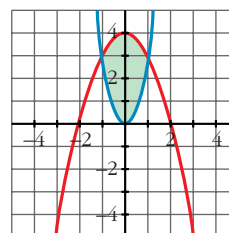
a)  $x^2 - (3 - 2x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1$

- $G(x) = \int (x^2 + 2x - 3) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$
- $G(-3) = 9$ ;  $G(1) = -\frac{5}{3}$
- Área =  $|G(1) - G(-3)| = \frac{32}{3} \text{ u}^2$



b)  $4 - x^2 - 3x^2 = 4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

- $G(x) = \int (4 - 4x^2) = 4x - \frac{4x^3}{3}$
- $G(-1) = -\frac{8}{3}$ ;  $G(1) = \frac{8}{3}$
- Área =  $|G(1) - G(-1)| = \frac{16}{3} \text{ u}^2$

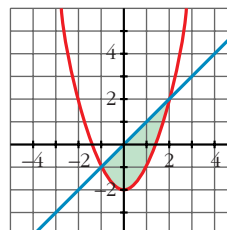


c)  $x - (x^2 - 2) = x - x^2 + 2 = -x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$

•  $G(x) = \int (-x^2 + x + 2) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$

•  $G(-1) = -\frac{7}{6}; G(2) = \frac{10}{3}$

• Área =  $|G(2) - G(-1)| = \frac{9}{2} u^2$

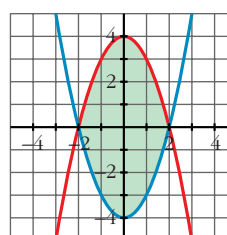


d)  $4 - x^2 - (x^2 - 4) = -2x^2 + 8 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

•  $G(x) = \int (-2x^2 + 8) = -\frac{2x^3}{3} + 8x$

•  $G(-2) = -\frac{32}{3}; G(2) = \frac{32}{3}$

• Área =  $|G(2) - G(-2)| = \frac{64}{3} u^2$

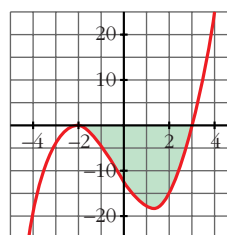


e)  $(x + 2)^2 (x - 3) = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3$

•  $G(x) = \int (x + 2)^2 (x - 3) = \int (x^3 + x^2 - 8x - 12) =$   
 $= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 4x^2 - 12x$

•  $G(-2) = \frac{28}{3}; G(3) = -\frac{171}{4}$

• Área =  $|G(3) - G(-2)| = \frac{625}{12} \approx 52,1 u^2$



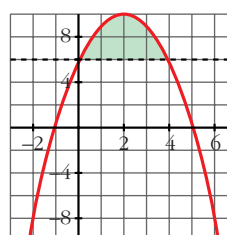
**16** Halla el área comprendida entre la curva  $y = -x^2 + 4x + 5$  y la recta  $y = 5$ .

**S**  $-x^2 + 4x + 5 - 5 = -x^2 + 4x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$

•  $G(x) = \int (-x^2 + 4x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$

•  $G(0) = 0; G(4) = \frac{32}{3}$

• Área =  $|G(4) - G(0)| = \frac{32}{3} u^2$



**17** Calcula el área limitada por las siguientes curvas:

**S** a)  $y = x^3 + x^2; y = x^3 + 1; x = -1; x = 1$

b)  $y = x^2; y = 1 - x^2; y = 2$

c)  $y = x(x - 1)(x - 2); y = 0$

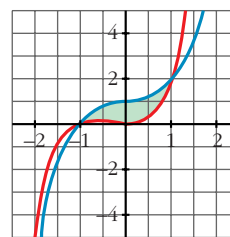
d)  $y = x^2 - 2x; y = x$

e)  $y = x^3 - 2x; y = -x^2$

f)  $y = 2x - x^3; y = x^2$

a)  $x^3 + x^2 - (x^3 + 1) = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

- $G(x) = \int (x^2 - 1) = \frac{x^3}{3} - x$
- $G(-1) = \frac{2}{3}; G(1) = -\frac{2}{3}$
- Área =  $|G(1) - G(-1)| = \frac{4}{3} u^2$



b)  $x^2 = 1 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $x^2 = 2 \rightarrow x_3 = -\sqrt{2}, x_4 = \sqrt{2}$

- Tenemos tres recintos:

$$I \left[ -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]; II \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]; III \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right]$$

- Para el I y el III hay que considerar:

$$G_1(x) = \int (2 - x^2) = x - \frac{x^3}{3}$$

$$G_1(-\sqrt{2}) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}; G_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{11\sqrt{2}}{12}; G_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{11\sqrt{2}}{12}; G_1(\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Área del recinto I} = \left| G_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_1(-\sqrt{2}) \right| = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Área del recinto III} = \left| G_1(\sqrt{2}) - G_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

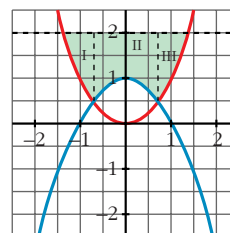
- Para el II hay que considerar:

$$G_2(x) = \int (2 - 1 + x^2) = \int (1 + x^2) = x + \frac{x^3}{3}$$

$$G_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{12}; G_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Área del recinto II} = \left| G_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| = \frac{7\sqrt{2}}{6}$$

- Área total =  $\frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{5\sqrt{2}}{12} = \frac{12\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2} u^2$

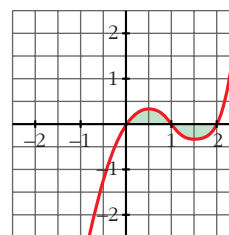


c)  $x(x - 1)(x - 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$

- Hay dos recintos: I [0, 1]; II [1, 2]

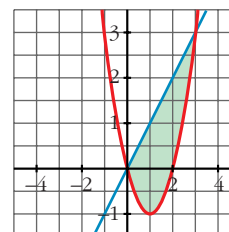
- $G(x) = \int x(x - 1)(x - 2) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$

- $G(0) = 0$ ;  $G(1) = \frac{1}{4}$ ;  $G(2) = 0$
- Área del recinto I =  $|G(1) - G(0)| = \frac{1}{4}$
- Área del recinto II =  $|G(2) - G(1)| = \frac{1}{4}$
- Área total =  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} u^2$



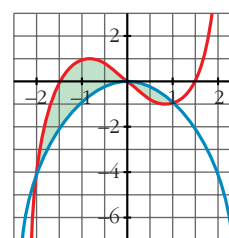
d)  $x^2 - 2x - x = x^2 - 3x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

- $G(x) = \int (x^2 - 3x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$
- $G(0) = 0$ ;  $G(3) = -\frac{9}{2}$
- Área =  $|G(3) - G(0)| = \frac{9}{2} u^2$



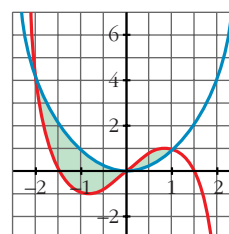
e)  $x^3 - 2x - (-x^2) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow$   
 $\rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$

- Hay dos recintos: I  $[-2, 0]$ ; II  $[0, 1]$
- $G(x) = \int (x^3 + x^2 - 2x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$
- $G(-2) = -\frac{8}{3}$ ;  $G(0) = 0$ ;  $G(1) = -\frac{5}{12}$
- Área del recinto I =  $|G(0) - G(-2)| = \frac{8}{3}$
- Área del recinto II =  $|G(1) - G(0)| = \frac{5}{12}$
- Área total =  $\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} u^2$



f) Por simetría respecto al anterior, el área es la misma:

$$\text{Área total} = \frac{37}{12} u^2$$



**18** Un depósito se vacía de forma variable según la función  $v(t) = 5 - 0,1t$  ( $t$  en min,  $v$  en l/min). Calcula lo que se ha vaciado el depósito entre los minutos 100 y 200.



$$G(t) = \int (5 - 0,1t) = 5t - \frac{0,1t^2}{2} = 5t - 0,05t^2$$

$$G(200) = -1000; \quad G(100) = 0$$

$$\text{Área} = |G(200) - G(100)| = 1000$$

Se han vaciado 1000 litros entre los minutos 100 y 200.

- 19** Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función:  $m = 0,01t^3 - 0,2t^2 + t + 1$  siendo  $m$  la cantidad de material en kg y  $t$  la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?

Consideramos  $t$  entre 0 y 24 horas:

$$\begin{aligned} \int_0^{24} (0,01t^3 - 0,2t^2 + t + 1) &= \left[ \frac{0,01t^4}{4} - \frac{0,2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \right]_0^{24} = \\ &= 219,84 - 0 = 219,84 \text{ kg} \end{aligned}$$

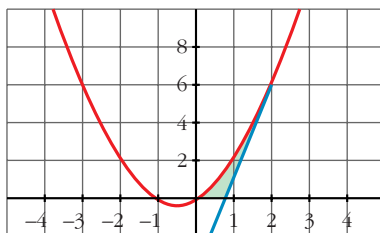
- 20** Calcula el área limitada por la gráfica de  $y = x + x^2$ , la tangente a esa curva en  $x = 2$  y el eje de abscisas.

- Recta tangente en  $x = 2$ :

$$y' = 1 + 2x \rightarrow m = y'(2) = 5; \quad y(2) = 6$$

$$\text{Recta} \rightarrow y = 6 + 5(x - 2) = 5x - 4$$

- Hacemos las gráficas para entender mejor la situación:



- Puntos de corte de  $y = x + x^2$  con el eje  $X$ :

$$x + x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 0$$

- Punto de corte de  $y = 5x - 4$  con el eje  $X$ :

$$5x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{5}$$

- Área bajo  $y = x + x^2$  entre 0 y 2:

$$G_1(x) = \int (x + x^2) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$G_1(2) = \frac{14}{3}; \quad G_1(0) = 0$$

$$\text{Área} = |G_1(2) - G_1(0)| = \frac{14}{3} u^2$$

- Área bajo  $y = 5x - 4$  entre  $\frac{4}{5}$  y 2:

$$G_2(x) = \int (5x - 4) = \frac{5x^2}{2} - 4x$$

$$G_2\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{5}; \quad G_2(2) = 2$$

$$\text{Área} = \left| G_2(2) - G_2\left(\frac{4}{5}\right) \right| = 2 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5} u^2$$

- El área buscada es:  $\frac{14}{3} - \frac{18}{5} = \frac{16}{15} u^2$

## Página 227

- 21** Dada la curva de ecuación  $y = x^3 - 2x^2 + x$ , halla la ecuación de su tangente en el origen y calcula el área de la región que queda encerrada entre la curva y la tangente.

- Tangente en el origen:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1; \quad m = y'(0) = 1; \quad y(0) = 0$$

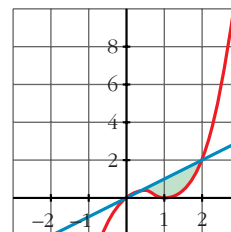
$$\text{Recta} \rightarrow y = x$$

- $x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2$

- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$

- $G(0) = 0; \quad G(2) = -\frac{4}{3}$

- Área =  $|G(2) - G(0)| = \frac{4}{3} u^2$



- 22** Halla el área de la figura sabiendo que el lado curvo corresponde a la función  $y = x^2 + 1$ .

- Entre  $-1$  y  $0$  tenemos un triángulo de base 1 y altura 1:

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} u^2$$

- Entre  $1$  y  $2$  tenemos un triángulo de base 1 y altura 2:

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 u^2$$



- Entre 0 y 1:

$$G(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x$$

$$G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área} = |G(1) - G(0)| = \frac{4}{3} u^2$$

- El área total será:  $\frac{1}{2} + 1 + \frac{4}{3} = \frac{17}{6} u^2$

**23** Dada la función  $f(x) = 4 - x^2$ , escribe las ecuaciones de las tangentes a  $f$  en los puntos de corte con el eje de abscisas. Halla el área comprendida entre las rectas tangentes y la curva.

- Puntos de corte con el eje  $X$ :

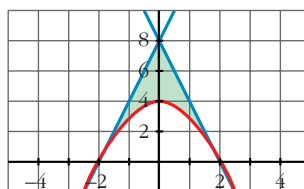
$$4 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2 \rightarrow \text{Puntos } (-2, 0) \text{ y } (2, 0)$$

- $f'(x) = -2x$ ;  $f'(-2) = 4$ ;  $f'(2) = -4$

- Recta tangente en  $x = -2 \rightarrow y = 4(x + 2) = 4x + 8$

$$\text{Recta tangente en } x = 2 \rightarrow y = -4(x - 2) = -4x + 8$$

- Hacemos una gráfica para entenderlo mejor:



- Área del triángulo de vértices  $(-2, 0)$ ,  $(0, 8)$  y  $(2, 0)$ :

$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16 u^2$$

- Área entre  $y = 4 - x^2$  y el eje  $X$ :

$$G(x) = \int (4 - x^2) = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$G(-2) = -\frac{16}{3}; \quad G(2) = \frac{16}{3}$$

$$\text{Área} = |G(2) - G(-2)| = \frac{32}{3} u^2$$

- El área total será la diferencia:  $16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3} u^2$

**24** Dada  $f(x) = x + 1$ , halla:

$$\text{a) } \int_0^x f \quad \text{b) } \int_1^x f \quad \text{c) } \int_{-1}^x f \quad \text{d) } \int_1^3 f$$

$$G(x) = \int (x + 1) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{3}{2}; \quad G(-1) = -\frac{1}{2}; \quad G(3) = \frac{15}{2}$$

$$\text{a) } \int_0^x f = G(x) - G(0) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\text{b) } \int_1^x f = G(x) - G(1) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } \int_{-1}^x f = G(x) - G(-1) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \int_1^3 f = G(3) - G(1) = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

**25** a) Halla el área limitada por  $y = |2x - 4|$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = 0$  y  $x = 5$ .

b) Calcula  $\int_{-2}^3 |2x - 4|$ .

a) Definimos la función por intervalos para hacernos una idea de su forma:

$$y = |2x - 4| = \begin{cases} -2x + 4, & x \leq 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}$$

El área buscada será:

$$\begin{aligned} \int_0^5 y &= \int_0^2 -2x + 4 + \int_2^5 2x - 4 = [-x^2 + 4x]_0^2 + [x^2 - 4x]_2^5 = \\ &= (4 - 0) + (5 + 4) = 4 + 9 = 13 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-2}^3 |2x - 4| &= \int_{-2}^2 -2x + 4 + \int_2^3 2x - 4 = [-x^2 + 4x]_{-2}^2 + [x^2 - 4x]_2^3 = \\ &= (4 + 12) + (-3 + 4) = 16 + 1 = 17 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

**26** Calcula: a)  $\int_0^2 f(x)$  y b)  $\int_{-1}^3 g(x)$ , siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$a) \int_0^2 f(x) = \int_0^1 x^2 + \int_1^2 (2-x)$$

$$G_1(x) = \int x^2 = \frac{x^3}{3} \rightarrow G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$G_2(x) = \int (2-x) = 2x - \frac{x^2}{2} \rightarrow G_2(2) - G_2(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Así: } \int_0^2 f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$b) \int_{-1}^3 g(x) = \int_{-1}^1 2x + \int_1^3 (x^2 + 1)$$

$$G_1(x) = \int 2x = x^2 \rightarrow G_1(1) - G_1(-1) = 1 - 1 = 0$$

$$G_2(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x \rightarrow G_2(3) - G_2(1) = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\text{Así: } \int_{-1}^3 g(x) = \frac{32}{3}$$

**27** Dada la función  $f(x)$ , halla el área limitada por  $f(x)$ , el eje  $OX$  y las rectas  $x = 0$  y  $x = 3$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < \frac{-1}{2} \\ -x^2 + 3x & \frac{-1}{2} \leq x \leq 3 \\ |x + 3| & x > 3 \end{cases}$$

Para  $x$  comprendida entre 0 y 3, tenemos que:

$$f(x) = -x^2 + 3x$$

Hallamos los puntos de corte con el eje  $OX$ :

$$-x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(-x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Por tanto, el área pedida es:

$$\text{Área} = \int_0^3 (-x^2 + 3x) = \left[ \frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ u}^2$$

**28** Halla una función  $f$  de la cual sabemos que:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 5 \text{ y que } f(1) = 0$$

$$G(x) = \int (3x^2 - 2x + 5) = x^3 - x^2 + 5x + k \text{ son las primitivas de la función dada.}$$

Entre todas ellas, nos interesa la que cumple que  $G(1) = 0$ , es decir:

$$G(1) = 5 + k = 0 \Rightarrow k = -5$$

$$\text{Así: } f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$$

**29** Halla la función primitiva de la función  $y = 3x^2 - x^3$  que pase por el punto  $(2, 4)$ .

$$G(x) = \int (3x^2 - x^3) = x^3 - \frac{x^4}{4} + k \text{ son las primitivas de la función dada.}$$

Buscamos  $k$  para que pase por  $(2, 4)$ :

$$G(2) = 4 + k = 4 \Rightarrow k = 0$$

La función que buscamos es:

$$f(x) = x^3 - \frac{x^4}{4}$$

**30** Halla la función que tome el valor 2 en  $x = 1$  y cuya derivada es:

$$f'(x) = 3x^2 + 6$$

$$G(x) = \int (3x^2 + 6) = x^3 + 6x + k \text{ son las primitivas de la función dada.}$$

Buscamos  $k$  para que  $G(1) = 2$ :

$$G(1) = 7 + k = 2 \Rightarrow k = -5$$

$$\text{Por tanto: } f(x) = x^3 + 6x - 5$$

**31** Halla la primitiva de  $f(x) = 1 - x - x^2$  que corte al eje de abscisas en  $x = 3$ .

$$G(x) = \int (1 - x - x^2) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + k \text{ son las primitivas de la función dada.}$$

Buscamos  $k$  para que  $G(3) = 0$ :

$$G(3) = -\frac{21}{2} + k \Rightarrow k = \frac{21}{2}$$

La función que buscamos es:

$$y = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{21}{2}$$

## CUESTIONES TEÓRICAS

- 32** Si  $F(x)$  y  $G(x)$  son dos primitivas de  $f$ , ¿se verifica necesariamente que  $F(x) = k + G(x)$ ? Justifica la respuesta.

Sí. Justificación:

$$\int f = F(x) + c_1 \qquad \int f = G(x) + c_2$$

Restando:

$$0 = F(x) - G(x) + (c_1 - c_2) \Rightarrow F(x) = k + G(x)$$

- 33** Siendo  $F(x) = \int_1^x f = 3x^2 - 5x$ , halla la función  $f$ . Calcula  $F(0)$  y  $F(2)$ .

$$f(x) = F'(x) = 6x - 5$$

$$F(0) = 0; \quad F(2) = 2$$

- 34** Calcula el área bajo la curva  $f(x) = x^2 - 1$  en el intervalo variable  $[1, x]$ . Halla el área para  $x = 4$ .

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 1$$

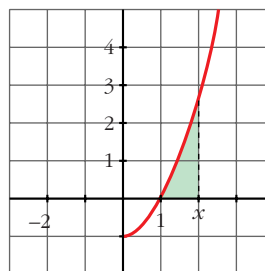
$$\text{Área} = \int_1^x (t^2 - 1)$$

$$G(t) = \int (t^2 - 1) = \frac{t^3}{3} - t$$

$$G(1) = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Área } [1, x] = |G(x) - G(1)| = \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$$

Cuando  $x = 4$ , queda: Área  $[1, 4] = 18 \text{ u}^2$



- 35** Demuestra, utilizando integrales, que el área del rectángulo es  $A = b \cdot a$ .

🔵 *Halla la ecuación de la recta  $r$  y calcula el área limitada por  $r$  y el eje  $OX$  entre  $x = 0$  y  $x = b$ .*

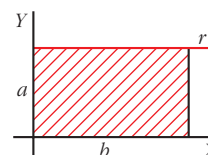
La ecuación de  $r$  es  $y = a$ . El área es:

$$\text{Área} = \int_0^b a$$

$$G(x) = \int a = ax$$

$$G(b) = ab; \quad G(0) = 0$$

$$\text{Área} = G(b) - G(0) = ab$$



**PARA PROFUNDIZAR**

**36** Dada la función  $f(x) = a e^{x/3} + \frac{1}{x^2}$  ( $x \neq 0$ ):

S

a) Calcula  $\int_1^2 f(x)$  en función de  $a$ .

b) Se sabe que  $F$  es una primitiva de  $f$ . Calcula  $a$  si  $F(1) = 0$  y  $F(2) = 1/2$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_1^2 f(x) &= \int_1^2 \left( a e^{x/3} + \frac{1}{x^2} \right) = \left[ 3a e^{x/3} - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left( 3a e^{2/3} - \frac{1}{2} \right) - \left( 3a e^{1/3} - 1 \right) = \\ &= 3a(e^{2/3} - e^{1/3}) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Si  $F$  es una primitiva de  $f$ , tenemos que:

$$F(x) = 3a e^{x/3} - \frac{1}{x} + k$$

Tenemos que hallar  $k$  y  $a$  para que:

$$\left. \begin{aligned} F(1) = 0 &\rightarrow 3a e^{1/3} - 1 + k = 0 && \left. \begin{aligned} &3a e^{1/3} + k = 1 \\ F(2) = \frac{1}{2} &\rightarrow 3a e^{2/3} - \frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} && \left. \begin{aligned} &3a e^{2/3} + k = 1 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

Restando la 2ª ecuación menos la 1ª:

$$3a(e^{2/3} - e^{1/3}) = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow k = 1$$

Por tanto:  $F(x) = -\frac{1}{x} + 1$

**37** Expresa por una integral el área del triángulo de vértices  $(0, 3)$ ,  $(7, 3)$  y  $(7, 10)$ . Explica el significado de la integral escrita.

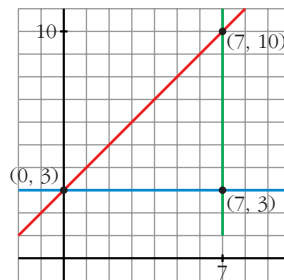
S

- La ecuación de la recta que pasa por  $(0, 3)$  y  $(7, 10)$  es:

$$\text{Pendiente} = \frac{10 - 3}{7 - 0} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\text{Ecuación: } y = x + 3$$

- La ecuación de la recta que pasa por  $(0, 3)$  y  $(7, 3)$  es:  
 $y = 3$ .



El área del triángulo es el área comprendida entre las dos rectas anteriores y  $x = 7$ . Así, tenemos que:

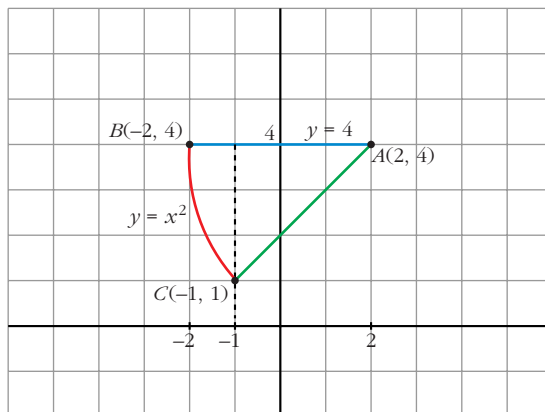
$$\text{Área} = \int_0^7 [(x + 3) - 3] = \int_0^7 x = \text{Área}$$

- Calculamos su valor:

$$\int_0^7 x = \frac{49}{2} \text{ u}^2$$



- 38** Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices  $A(2, 4)$ ,  $B(-2, 4)$  y  $C(-1, 1)$ , en el que las líneas  $AB$  y  $AC$  son rectas, mientras que la que une los puntos  $B$  y  $C$  es la de ecuación  $y = x^2$ .



- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por  $A$  y  $C$ :

$$\text{Pendiente} = \frac{4 - 1}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{Ecuación: } y = 4 + (x - 2) = x + 2$$

- Calculamos el área pedida:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^{-1} (4 - x^2) + \int_{-1}^2 [4 - (x + 2)] = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \int_{-1}^2 (2 - x) = \\ &= \left(-4 + \frac{1}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = \frac{5}{3} + 2 + \frac{5}{2} = \frac{37}{6} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

- 39** La curva  $y = a[1 - (x - 2)^2]$ , con  $a > 0$ , limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de  $a$ .

- Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

$$a[1 - (x - 2)^2] = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 1 \begin{cases} x - 2 = 1 \rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

- Calculamos el área e igualamos a 12:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^3 a[1 - (x - 2)^2] = a \left[ x - \frac{(x - 2)^3}{3} \right]_1^3 = a \left[ 3 - \frac{1}{3} - \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \right] = \\ &= a \left[ 2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{4a}{3} = 12 \rightarrow a = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9 \rightarrow a = 9 \end{aligned}$$