

UNIDAD 2

MATRICES



Página 50

1. A tres amigos, M , N , P , se les pide que contesten a lo siguiente:

“¿Crees que alguno de vosotros aprobará la selectividad? Di quiénes”.

Estas son las respuestas:

— M opina que él mismo, M , y P .

— N opina que solo M .

— P opina que solo él mismo, P .

$$\begin{array}{c} M \quad N \quad P \\ M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Reflexiona sobre la relación que hay entre las respuestas y la caja numérica formada por *ceros* y *unos* que hay debajo de ellas.

1 significa sí y 0 significa no. La 1ª fila indica que M piensa que aprobarán él mismo y P . La 2ª fila indica que N opina que sólo aprobará M . La 3ª fila indica que P piensa que sólo aprobará él mismo.

- La caja numérica que aparece a continuación es la síntesis de las respuestas que han dado los siete alumnos (A , B , C , D , E , F y G) de un grupo de teatro a esta pregunta:

“¿Quién o quiénes de vosotros creéis que sería capaz de diseñar, organizar y dirigir un viaje de estudios de una semana?”

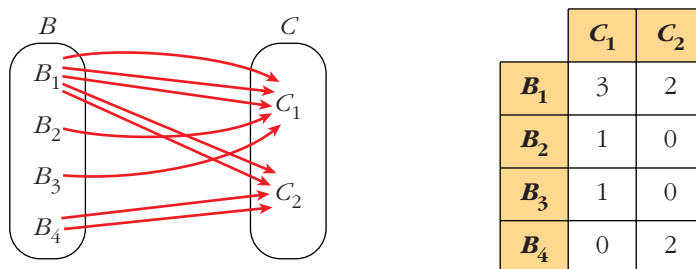
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A la vista de las respuestas, di:

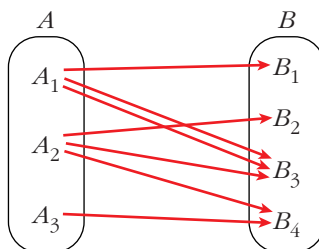
- a) ¿Quién de ellos te parece un tanto iluso?
- b) Dos de ellos parece que están algo aislados del resto del grupo. ¿Quiénes son?
- c) Si tuvieras que designar a uno de ellos para que se hiciera cargo de la organización del viaje, ¿a quién elegirías?
- a) D , pues piensa que hay tres personas capaces de organizarlo, y, además, es el único que opina que B está capacitado.
- b) F y G . F opina que solo es capaz G ; y G opina que solo es capaz F .
- c) E es el más seleccionado: hay 4 que lo eligen.

Página 51

2. ■ Aquí tienes representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país B hasta el país C . Representa, mediante una tabla, la información recogida en el diagrama.



- Una persona quiere salir el lunes de A , pasar la noche en B y llegar el martes a C .



En total tenemos 5 posibles formas de ir de A_1 a C_1 .

Continúa tú, rellenando razonadamente el resto de la tabla y explicando, en cada caso, cómo llegas a la respuesta.

	C_1	C_2
A_1	5	2
A_2	2	2
A_3	0	2

Página 53

1. Escribe las matrices traspuestas de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F = (5 \ 4 \ 6 \ 1)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

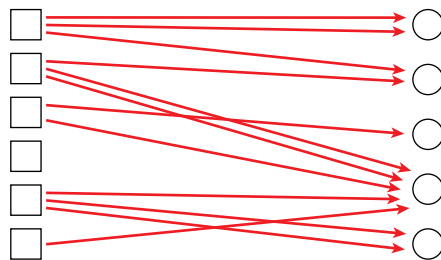
$$E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Escribe una matriz X tal que $X^t = X$.

Por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Escribe una matriz que describa lo siguiente:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Página 54

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Página 57

2. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3. Intenta conseguir una matriz I_3 de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier otra matriz $A(3 \times 3)$, la deje igual.

Es decir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriz I_3 se llama matriz unidad de orden 3. Cuando la tengas, sabrás obtener una matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 58

1. Comprueba las propiedades 2, 3 y 4 anteriores, referentes al producto de números por matrices, tomando: $a = 3$, $b = 6$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2) \left. \begin{aligned} 9A &= \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ 3A + 6A &= \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$9A = 3A + 6A$$

$$3) \left. \begin{aligned} 3(A + B) &= 3 \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ 3A + 3B &= \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$3(A + B) = 3A + 3B$$

$$4) 1 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Página 59

2. Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left. \begin{aligned} (B + C) \cdot D &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \\ B \cdot D + C \cdot D &= \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$$

Página 62

1. Calcula x, y, z, t para que se cumpla: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-z & 2y-t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - z = 5 \\ 2y - t = 1 \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array}$$

Solución: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Para las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **comprueba:**

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \right\} (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } A \cdot (B \cdot C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

3. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Encuentra X **que cumpla:** $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

4. Encuentra dos matrices, A y B , de dimensión 2×2 que cumplan:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumando: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

$$\text{Sumando: } -Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

6. Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ han de ser iguales}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x + z \\ x + y = y + t \\ z = z \\ z + t = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = t \\ z = 0 \end{array} \quad \text{Solución: } X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \text{ donde } x \text{ e } y \text{ son números reales cualesquiera.}$$

7. Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A - B) \cdot C$

c) $A \cdot B \cdot C$

a) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A - I)^2 = 0$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Halla la inversa de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7x + 3z & 7y + 3t \\ 2x + z & 2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 3z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = -2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 7y + 3t = 0 \\ 2y + t = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ t = 7 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ -8x + 5z & -8y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2z = 1 \\ -8x + 5z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -5 \\ z = -8 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 3y - 2t = 0 \\ -8y + 5t = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -2 \\ t = -3 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

Página 63

1. Considera $\vec{u}(7, 4, -2)$, $\vec{v}(5, 0, 6)$, $\vec{w}(4, 6, -3)$, $a = 8$, $b = -5$, elementos de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R} . Comprueba las ocho propiedades que se enumeran arriba.

Comprueba si los siguientes conjuntos de n -uplas son L.I. o L.D.

• *Asociativa:* $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (12, 4, 4) + \vec{w} = (16, 10, 1)$$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + (9, 6, 3) = (16, 10, 1)$$

• *Conmutativa:* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$$\vec{u} + \vec{v} = (12, 4, 4) = \vec{v} + \vec{u}$$

• *Vector nulo:* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

$$\vec{v} + \vec{0} = (5, 0, 6) + (0, 0, 0) = (5, 0, 6) = \vec{v}$$

• *Vector opuesto:* $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (5, 0, 6) + (-5, 0, -6) = (0, 0, 0)$$

• *Asociativa:* $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

$$(8 \cdot (-5)) \cdot (5, 0, 6) = -40 \cdot (5, 0, 6) = (-200, 0, -240)$$

$$8 \cdot [-5 \cdot (5, 0, 6)] = 8 \cdot (-25, 0, -30) = (-200, 0, -240)$$

• *Distributiva I:* $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

$$(a + b) \cdot \vec{v} = 3 \cdot (5, 0, 6) = (15, 0, 18)$$

$$a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v} = 8 \cdot (5, 0, 6) - 5 \cdot (5, 0, 6) = (40, 0, 48) - (25, 0, 30) = (15, 0, 18)$$

• *Distributiva II:* $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

$$a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 8 \cdot (12, 4, 4) = (96, 32, 32)$$

$$a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = 8 \cdot (7, 4, -2) + 8 \cdot (5, 0, 6) = (56, 32, -16) + (40, 0, 48) = (96, 32, 32)$$

• *Producto por 1:* $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

$$1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (5, 0, 6) = (5, 0, 6) = \vec{v}$$

Página 65

2. $(3, 0, 1, 0)$, $(2, -1, 5, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(4, -2, 0, -5)$

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(4, -2, 0, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(3x + 2y + 4w, -y - 2w, x + 5y + z, z - 5w) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x + 2y & + & 4w = 0 \\ & -y & - 2w = 0 \\ x + 5y + z & & = 0 \\ & & z - 5w = 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

3. $(3, 0, 1, 0)$, $(2, -1, 5, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 0, 1)$

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(3x + 2y, -y, x + 5y + z, z + w) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x + 2y & & = 0 \\ & -y & = 0 \\ x + 5y + z & & = 0 \\ & & z + w = 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

4. $(2, -4, 7)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 1, 2)$

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(2, -4, 7) + y(1, 0, 2) + z(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(2x + y, -4x + z, 7x + 2y + 2z) = (0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x + y & & = 0 \\ -4x & + & z = 0 \\ 7x + 2y + 2z & & = 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

5. $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$

Explica por qué si en un conjunto de vectores está el vector cero, entonces son L.D.

• Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Si hacemos $x = 0$, $y = 0$, z puede tomar cualquier valor, por tanto, los vectores son *linealmente dependientes*.

- Si en un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ está el vector cero, podemos conseguir una combinación lineal de ellos:

$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_{n-1} \vec{u}_{n-1} + x_n \vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

en la que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ y $x_n \neq 0$. Como no todos los coeficientes son nulos, los vectores son linealmente dependientes.

Página 67

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ -2 \cdot 3^a + 2^a \\ 4^a - 4 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 3^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 3$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 5 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 2$$

Página 72

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $-2A + 3B$ b) $\frac{1}{2} A \cdot B$ c) $B \cdot (-A)$ d) $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

2 Efectúa el producto $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

3 a) ¿Son iguales las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$?

b) Halla, si es posible, las matrices AB ; BA ; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2 . Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$$A^t - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } (A + B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } (3A)^t &= \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ 3A^t &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (3A)^t = 3A^t$$

5 Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} 3AA^t - 2I &= 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ B^t \cdot A^t &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

7 Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 3B = 2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

8 Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

9 ¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?

La matriz unidad, I .

10 Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la de $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

11 Con las matrices A y B del ejercicio anterior y sus inversas, A^{-1} y B^{-1} , comprueba que:

a) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } (A + B)^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ A^{-1} + B^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3/4 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } (A \cdot B)^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\ B^{-1} \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Rango de una matriz

12 Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 3, 7)$, $\vec{u}_2 = (2, 5, 0, 4)$ y di cuál es el rango de la matriz cuyas columnas son \vec{u}_1 y \vec{u}_2 .

b) $\vec{v}_1 = (1, 0, -2, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 3, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (4, -1, -1, 6, 4)$ y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^a & \\ 2^a + 1^a & \\ 3^a - 3 \cdot 1^a & \\ 4^a - 7 \cdot 1^a & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & -6 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^a & \\ 2^a & \\ 6 \cdot 2^a + 7 \cdot 3^a & \\ 10 \cdot 2^a + 7 \cdot 4^a & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

Los vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 son linealmente independientes.

$$\text{b) } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^a & & & & \\ 2^a - 2 \cdot 1^a & & & & \\ 3^a - 4 \cdot 1^a & & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^a & & & & \\ 2^a & & & & \\ 3^a - 2^a & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

El conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ es linealmente dependiente. Hay dos vectores linealmente independientes.

13 Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A .

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

Ecuaciones con matrices

14 Halla las matrices X e Y que verifican el sistema

S

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15 Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

S

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

16 Determina los valores de m para los cuales

S

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ verifique } X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0.$$

$$\begin{aligned} X^2 - \frac{5}{2}X + I &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2$; $m_2 = \frac{1}{2}$

17 Resuelve: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{cases} \left. \begin{matrix} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{matrix} \right\}$$

Sumando: $4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$

Solución: $x = \frac{-5}{4}$; $y = \frac{-7}{4}$

Página 73

PARA RESOLVER

18 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3, \dots, A^{128} .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

19 Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3.

Utiliza esa igualdad para calcular A^4 .

$$\left. \begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I &= \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4 :

$$\begin{aligned} A^4 &= (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 = \\ &= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I = \\ &= 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

20 Determina a y b de forma que la matriz

S $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \rightarrow \begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4 - a = 2 & \rightarrow a = 2 \\ -2 - b = -1 & \rightarrow b = -1 \\ 2a + ab = a & \rightarrow 4 - 2 = 2 \\ -a + b^2 = b & \rightarrow -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

21 Calcula A^n y B^n siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

S

$$\bullet A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Lo probamos por inducción:}$$

Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

22 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

S

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} A B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } A^{-1}: |A| = -3; A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$B = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

23 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.

S

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

• Multiplica $I + A + A^2$ por $I - A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

24 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A + I)^2 = \mathbf{0}$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I .

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I :

$$(A + I)^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A + I)(A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \rightarrow \\ \rightarrow A^2 = -2A - I$$

25 a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1 \ -2 \ 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $XA = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{7}{5} \quad \frac{1}{5} \quad -2 \right)$$

26 Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores según los valores del parámetro t :

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1, -2)$,

$\vec{u}_3 = (3, 1, 1, t)$

b) $\vec{v}_1 = (2, -2, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 5, 3, 3)$,

$\vec{v}_3 = (1, 1, t, 1)$, $\vec{v}_4 = (2, 6, 4, 4)$

a) Debemos estudiar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & 1 & t-6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & t+6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(M) = 3 \text{ para cualquier valor de } t$$

Los tres vectores son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de t .

b) Hallamos el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a : 2 \\ 2^a \\ 4^a : 2 \\ 3^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & t & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a : 3 \\ 3^a : 2 \\ 4^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $t = 1$, $\text{ran}(M) = 2 \rightarrow$ Hay dos vectores linealmente independientes.
- Si $t \neq 1$, $\text{ran}(M) = 3 \rightarrow$ Hay tres vectores linealmente independientes.

27 Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k :
S

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\rightarrow \text{ran}(M) = 3$ para cualquier valor de k .

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1+2k=0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

• Si $k = -\frac{1}{2}$, $\text{ran}(N) = 2$.

• Si $k \neq -\frac{1}{2}$, $\text{ran}(N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 3^a : 4 \\ 2^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

• Si $k = -2 \rightarrow \text{ran}(P) = 1$

• Si $k \neq -2 \rightarrow \text{ran}(P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

• Si $k = 2 \rightarrow \text{ran}(Q) = 2$

• Si $k \neq 2 \rightarrow \text{ran}(Q) = 3$

- 28** Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $\text{ran}(A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; es decir, $k = 2$.

- 29** Halla X e Y sabiendo que $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left. \begin{array}{l} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -15X - 9Y = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & -45 \end{pmatrix} \\ 15X + 10Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumando: } Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 30** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ halla dos números reales m y n tales que $A + mA + nI = 0$.

$$A + mA + nI = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2m + n & 1 + m \\ 2 + 2m & 3 + 3m + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 + 2m + n = 0 & \rightarrow n = 0 \\ 1 + m = 0 & \rightarrow m = -1 \\ 2 + 2m = 0 & \rightarrow m = -1 \\ 3 + 3m + n = 0 & \rightarrow n = 0 \end{cases}$$

Solución: $m = -1$; $n = 0$

- 31** Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 - 1 & 2k - 2 & 4k - 4 \\ 2k - 2 & k^2 - 1 & 4k - 4 \\ 2 - 2k & 2 - 2k & k^2 - 6k + 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow k = 1$$

- 32** Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.

Cada mes:

	E	M	L
BUTACAS	20	15	10
MECEDORAS	12	8	5
SILLAS	18	20	12

Cada año:

		E	M	L											
12 ·	$\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix}$	=	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">BUTACAS</td> <td style="padding: 0 10px;">240</td> <td style="padding: 0 10px;">180</td> <td style="padding: 0 10px;">120</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;">MECEDORAS</td> <td style="padding: 0 10px;">144</td> <td style="padding: 0 10px;">96</td> <td style="padding: 0 10px;">60</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;">SILLAS</td> <td style="padding: 0 10px;">216</td> <td style="padding: 0 10px;">240</td> <td style="padding: 0 10px;">144</td> </tr> </table>	BUTACAS	240	180	120	MECEDORAS	144	96	60	SILLAS	216	240	144
BUTACAS	240	180	120												
MECEDORAS	144	96	60												
SILLAS	216	240	144												

Página 74

- 33** En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

a)

	P	G		C	B
L3	4	3	;	2	4
L4	5	4		4	6
L5	6	5			

b)

	P	G		C	B								
L3	4	3	·	2	4								
L4	5	4		4	6								
L5	6	5		=	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">L3</td> <td style="padding: 0 10px;">20</td> <td style="padding: 0 10px;">34</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;">L4</td> <td style="padding: 0 10px;">26</td> <td style="padding: 0 10px;">44</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;">L5</td> <td style="padding: 0 10px;">32</td> <td style="padding: 0 10px;">54</td> </tr> </table>	L3	20	34	L4	26	44	L5	32
L3	20	34											
L4	26	44											
L5	32	54											

- 34** Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O).
S De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1 , M_2 , M_3 y M_4 .

$$\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{cc} \text{T} & \text{O} \\ \left(\begin{array}{cc} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{array} \right) \end{array} \quad \text{Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.}$$

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1 , el 5% en el M_2 , el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4 .

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{array}{cccc} & & & \begin{array}{cc} \text{T} & \text{O} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} & \begin{array}{cc} D & B \end{array} & \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} 0,02 & 0,05 \\ 0,08 & 0,1 \\ 0,92 & 0,9 \end{array} \right) & \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{array} \right) \end{array} & = & \begin{array}{cc} D & B \end{array} & \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} 96 & 60,9 \\ 1354 & 869,1 \end{array} \right) & \approx & \begin{array}{cc} D & B \end{array} & \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} 96 & 61 \\ 1354 & 869 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

- 35** Halla todas las matrices X de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
S

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b + c = 0 \\ c^2 = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a = -b \\ b = \pm 1 \\ c = -b \\ c = \pm 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1 \rightarrow b = -1 \rightarrow c = 1 \\ a = -1 \rightarrow b = 1 \rightarrow c = -1 \end{array}$$

Hay dos soluciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- 36** Calcula una matriz X que conmuta con la matriz A , esto es, $A \cdot X = X \cdot A$,
S siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ han de ser iguales.}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array} \right\} X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

37 Sean A y B las matrices dadas por:

S

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left. \begin{array}{l} 5a+2c = 5a+2b \\ 5b+2c = 2a+5b \\ 2a+5c = 7c \\ 2b+5c = 7c \end{array} \right\} \begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array} \right\} a = b = c$$

38 Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10} .

S

• Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \rightarrow A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

- 39** Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta.

Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal: $A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• Haz $A \cdot A^t = I$.

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{9}{25} + x^2 = 1 \\ \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}x = 0 \\ y^2 + \frac{9}{25} = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^2 = \frac{16}{25} \\ y = x \\ y^2 = \frac{16}{25} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = \pm \frac{4}{5} \\ y = x \end{array} \right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \frac{4}{5}$; $y_1 = \frac{4}{5}$ $x_2 = -\frac{4}{5}$; $y_2 = -\frac{4}{5}$

- 40** Resuelve la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

CUESTIONES TEÓRICAS

- 41** Justifica por qué no es cierta la igualdad: $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB = BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

42 Sea A una matriz de dimensión 2×3 :

S

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ tenemos que: } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1×2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = (1 \ 2), \text{ entonces } B \cdot A = (5 \ 2 \ 0)$$

43 Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?

S

Si la respuesta es afirmativa, justificala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ no es simétrica.}$$

Página 75

44 Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como $tr(A) = a_{11} + a_{22}$.

S

Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}; \text{ entonces:}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow tr(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Por tanto, $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

- 45** Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \text{ su producto es:}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}, \text{ que también es una matriz diagonal.}$$

- 46** Sean $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,p}$, $C = (c_{ij})_{q,r}$. ¿Qué condiciones deben cumplir p , q y r para que se puedan efectuar las siguientes operaciones?

a) $A \cdot C \cdot B$

b) $A \cdot (B + C)$

a) $n = q = r$

b) $n = q; p = r$

- 47** Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?

No, porque el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. Si añadimos una fila, A seguiría teniendo dos columnas; y si añadimos una columna, A seguiría teniendo dos filas. Por tanto, el rango seguiría siendo 2.

- 48** Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

a) Tendrá rango dos.

b) No. Podría ser dos o uno. Por ejemplo:

$$\text{Si en } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ suprimimos la primera fila y la tercera columna,}$$

$$\text{queda } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ que tiene rango 1 (} A \text{ tenía rango 3).}$$

- 49** a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$$AB + BA = 0 \rightarrow A^{-1}AB + A^{-1}BA = 0 \rightarrow B + A^{-1}BA = 0$$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \rightarrow BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ a + d = 0 \\ a + d = 0 \\ 2b - c + 3d = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array}} \right\} d = -a$$

$$\rightarrow 3a - 2b + c = 0 \rightarrow c = -3a + 2b$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, a y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

50 Demuestra que si una matriz verifica $A^2 = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ es la matriz nula), entonces **A** no puede tener inversa.

Supongamos que se verifica que $A^2 = \mathbf{0}$, pero que A sí tiene inversa, que existe A^{-1} .

Multiplicando la igualdad $A^2 = \mathbf{0}$ por $(A^{-1})^2$, quedaría:

$$(A^{-1})^2 \cdot A^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A^{-1} \cdot A)^2 = \mathbf{0} \rightarrow I = \mathbf{0}; \text{ lo cual es absurdo.}$$

Por tanto, deducimos que no existe A^{-1} .

51 ¿Es posible añadir una fila a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ de forma que la nueva matriz tenga rango 4?

Razona la respuesta.

Calculemos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 2; luego, añadiendo una fila, la matriz resultante no podrá tener rango 4 (tendría rango 2 ó 3).

PARA PROFUNDIZAR

52 Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que

$$A \cdot B = A \cdot C, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C, \text{ pero } B \neq C.$$

b) Debe existir A^{-1} .

53 **S** Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si su inversa, A^{-1} , coincide con su traspuesta, A^t , ha de tenerse que $A \cdot A^t = I$. Es decir:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ Por ejemplo, obtenemos, entre otras: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

54 Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores de a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \\ a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 1$, $\text{ran}(M) = 2$
- Si $a = -2$, $\text{ran}(M) = 2$
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, $\text{ran}(M) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \bullet \text{ Si } a = 0, \text{ ran}(A) = 2 \\ \bullet \text{ Si } a \neq 0, \text{ ran}(A) = 3 \end{array}$$

- 55** Se dice que una matriz es *antisimétrica* cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ y } -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

Para que $A^t = -A$, ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{cases} \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ d = 0 \end{cases}$$

Por tanto, una matriz *antisimétrica de orden 2* es de la forma: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

- 56** Recuerda que una matriz A es *simétrica* si $A^t = A$. Una matriz se llama *antisimétrica* si $-A^t = A$. (Tanto las matrices simétricas como las antisimétricas son, obviamente, cuadradas.) Demuestra que en una matriz antisimétrica todos los elementos de la diagonal principal son ceros.

- Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, los elementos de su diagonal principal son a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$.
- La traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal también serán a_{ii} (los mismos que los de A).
- La opuesta de la traspuesta es $-A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal serán $-a_{ii}$.
- Para que $-A^t = A$, han de ser $a_{ii} = -a_{ii}$; por tanto, $a_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, n$ (es decir, los elementos de la diagonal principal son ceros).

- 57** Decimos que una matriz cuadrada es *mágica de suma k* cuando la suma de los elementos de cada fila, así como los de cada columna y los de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a k . ¿Cuánto vale k si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

- Hemos visto en el ejercicio anterior que, en una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son ceros. Por tanto, si la matriz es antisimétrica, $k = 0$.
- Buscamos las matrices mágicas antisimétricas de orden 3: (sabemos que, en este caso, la suma ha de ser cero).

Veamos cómo es una matriz antisimétrica de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot A \text{ antisimétrica si } A^t = -A; \text{ es decir:}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{cases}$$

Luego, una matriz *antisimétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$

Para que A sea *mágica*, ha de tenerse que: $\left. \begin{array}{l} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -b - c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{array}$

es decir: $\begin{cases} c = -b \\ f = b \end{cases}$

Por tanto, las matrices mágicas antisimétricas de orden 3 son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

58 Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 0$.

Una matriz simétrica de orden 3 es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ (pues } A = A^t). \text{ Para que sea mágica con } k = 0, \text{ ha de ser:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ b + d + e = 0 \\ c + e + f = 0 \\ a + d + f = 0 \\ 2c + d = 0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a - 1^a \\ 5^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 2^a \\ 5^a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 3^a \\ 5^a - 2 \cdot 3^a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a : 2 \\ 5^a + 4^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \rightarrow a = -b - c = -f \\ b + d + e = 0 \rightarrow b = -e = f \\ c + e + f = 0 \rightarrow c = 0 \\ d + e + f = 0 \rightarrow e = -f \\ 3d = 0 \rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con $k = 0$* , es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}.$$

59 Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 3$.

Una matriz *simétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Para que sea mágica con $k = 3$, ha de ser:

$$\left. \begin{array}{r} a + b + c = 3 \\ b + d + e = 3 \\ c + e + f = 3 \\ a + d + f = 3 \\ 2c + d = 3 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a - 1^a \\ 5^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 2^a \\ 5^a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 3^a \\ 5^a - 2 \cdot 3^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a : 2 \\ 5^a + 4^a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \rightarrow a = 3 - b - c = 3 - f - 1 = 2 - f \\ b + d + e = 3 \rightarrow b = 3 - d - e = 3 - 1 - 2 + f = f \\ c + e + f = 3 \rightarrow c = 3 - e - f = 3 - 2 + f - f = 1 \\ d + e + f = 3 \rightarrow e = 3 - d - f = 3 - 1 - f = 2 - f \\ 3d = 3 \rightarrow d = 1 \end{cases}$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con $k = 3$* , es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, con $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$